# HƯỚNG DẪN GIẢI.

**Bài 1**

**1.** Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;4;-16)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;1)$ là VTPT của $(P)$.

a) Gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa $A, B$ và $(Q)\perp(P)$

Mà $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(-12;-30;-6)$ nên $\overrightarrow{n_Q}=(2;5;1)$ là một VTPT của $(Q)$

Vậy phương trình của $(Q): 2x+5y+z-11=0$.

b) Ta thấy hai điểm $A, B$ nằm về hai phía so với mặt phẳng $(P)$.

Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của $A$ lên mặt phẳng $(P)$ ta có $\overrightarrow{AH}=t.\overrightarrow{n_P}$

Suy ra $\begin{cases} a+1=2t \\ b-3=-t \\ c+2=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2t-1 \\ b=-t+3 \\ c=t-2 \end{cases}$.

Mặt khác $H\in(P)$ nên

$2a-b+c+1=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)-(-t+3)+t-2+1=0$

Từ đó ta tìm được $H(1;2;-1)$.

Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua mặt phẳng $(P)$, suy ra $A'(3;1;0)$ đồng thời $A'$ với $B$ nằm về hai phía so với mặt phẳng $(P)$.

Khi đó với mọi điểm $M\in(P)$ ta có : $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M=A'B\cap(P)$. Từ đó ta tìm được $M(2;2;-3)$.

**2.** Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-4;-4);\overrightarrow{CD}=(2;10;-8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0 \Rightarrow AB\perp CD \Rightarrow (AB,CD)=90^0$

Do $AB$ không đổi $\Rightarrow \Delta AMB$ có chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM+BM$ nhỏ nhất

Gọi $M(x;y;z)\in CD \Rightarrow \overrightarrow{CM}=k.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2k \\ y=-4+10k \\ z=3-8k \end{cases}$

$\Rightarrow M(-1+2k;-4+10k;3-8k)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2k-3;10k-7;1-8k), \overrightarrow{BM}=(2k-7;10k-3;5-8k)$

Suy ra $AM+BM=\sqrt{168k^2-168k+59}+\sqrt{168-168k+83}$

$$=\sqrt{168\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+17}+\sqrt{168\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+41}\geq\sqrt{17}+\sqrt{41}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow k=\frac{1}{2} \Leftrightarrow M(0;1;-1)$.

**3.** Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần tìm; $\Delta$ nằm trong mặt phẳng $(Q)$ đi qua A và song song với $(P)$.

Phương trình $(Q): x-2y+2z+1=0$.

Gọi $K, H$ là hình chiếu của $B$ trên $\Delta$, $(Q)$. Ta có $BK \geq BH \Rightarrow AH$ là đường thẳng cần tìm. Tọa độ của $H$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\frac{26}{9};\frac{11}{9};-\frac{2}{9}\right).$$

Vậy phương trình $\Delta: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

**4.** Giả sử mặt phẳng $(\alpha)$ cắt các tia $Ox, Oy, Oz$ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1$ (1).

a) Khối tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh $O$ vuông, nên thể tích là

$$V=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}|a||b||c|=\frac{1}{6}abc.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{36}{abc}} \Rightarrow abc \geq 972 \Rightarrow V \geq 162$$

Dấu đẳng thức có khi $\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{9}{c}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow a=3, b=12, c=27$.

Vậy thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất là $162$ (đvtt), khi mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{27}=1 \Leftrightarrow 36x+9y+4z-108=0$.

b) Đặt $T=OA+OB+OC=a+b+c$. Ta có

$$T.1=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)=14+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{9b}{c}+\frac{4c}{b}+\frac{9c}{a}+\frac{c}{a}$$

$$\geq 14+2\sqrt{\frac{4ab}{ba}}+2\sqrt{\frac{36bc}{cb}}+2\sqrt{\frac{9ca}{ac}}=36 \Rightarrow T \geq 36.$$

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1 \\ \dfrac{4a}{b}=\dfrac{b}{a};\dfrac{9b}{c}=\dfrac{4c}{b};\dfrac{9c}{a}=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=18 \end{cases}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $OA+OB+OC$ là $36,$ khi mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{18}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-36=0.$

**5.** a) Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases} x=-3+2t \\ y=4+t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$

Tọa độ giao điểm của $AB$ và $\Delta$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} -3+2t=1+2v \\ 4+t=8+3v \\ 1-t=1+v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ v=-1 \end{cases} \Rightarrow I(-1;\,5;\,0).$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $I(-1;\,5;\,0).$

Ta có $\overrightarrow{AI}(2;\,1;\,-1),\ \overrightarrow{AB}(4;\,2;\,-2)$ nên $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI},$ hay $I$ thuộc đoạn thẳng $AB.$

Vì $MA+MB\ge AB$ và dấu đẳng thức có khi $M\equiv I$ nên giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AB,$ xảy ra khi $M(-1;\,5;\,0).$

b) Do $\overrightarrow{AC}(4;\,6;\,2)=2\vec{u}_\Delta$ và $A\notin\Delta$ nên $AC//\Delta,$ tức là $AC$ và $\Delta$ nằm trong mặt phẳng $(P)$ và $A,C$ cùng phía so với $\Delta.$

Gọi hình chiếu của $A$ trên $\Delta$ là $H(1+2t;8+3t;\,1+t),$ ta có

$$\overrightarrow{AH}(4+2t;\,4+3t;\,t),\ \vec{u}_\Delta(2;\,3;\,1).$$

Vì $AH\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_\Delta=0 \Leftrightarrow 2(4+2t)+3(4+3t)+t=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{10}{7}$

Do đó $H\left(-\dfrac{13}{7};\dfrac{26}{7};-\dfrac{3}{7}\right).$

Gọi $A'$ đối xứng với $A$ qua $\Delta$ thì $H$ là trung điểm của $AA'$ nên tọa độ điểm $A'$ là $A'\left(-\dfrac{5}{7};\dfrac{24}{7};-\dfrac{13}{7}\right).$

Ta có $A'$ và $C$ nằm khác phía so với $\Delta$ trong mặt phẳng $(P)$ đồng thời $MA+MC=MA'+MC\ge A'C,$ nên giá trị nhỏ nhất của $MA+MC$ bằng $A'C$ khi $M=A'C\cap\Delta.$

Do $\overrightarrow{A'C}=\dfrac{2}{7}(6;\,23;\,17)$ nên phương trình $A'C:\begin{cases} x=1+6u \\ y=10+23u \\ z=3+17u \end{cases} (u\in\mathbb{R}).$

Vậy điểm $M$ cần tìm là $M\left(\frac{1}{7};\frac{47}{7};\frac{4}{7}\right)$.

**Bài 2**

**1.** a) Ta có: $C(a;a;0)$, $B'(a;0;b)$, $C'(a;a;b)$, $D'(0;a;b) \Rightarrow M(a;a;\frac{b}{2})$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b)$, $\overrightarrow{A'D}=(0;a;-b)$, $\overrightarrow{A'M}=(a;a;-\frac{b}{2})$ nên

$\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=(ab;ab;a^2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'M}.\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=\frac{3a^2b}{2}$. Vậy $V_{A'MBD}=\frac{a^2b}{4}$.

b) Do $a,b>0$ nên áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$4=a+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+b\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b}\Rightarrow a^2b\leq\frac{256}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}=b\\ a+b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{8}{3}\\ b=\frac{4}{3}\end{cases}$

Vậy $\max V_{A'BDM}=\frac{64}{27}$.

**2.** a) Vì điểm $D\in(Oyz)$ nên $D(0;y;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1),\overrightarrow{CD}(-3;y-2;z-6),\overrightarrow{AC}(0;3;6),\overrightarrow{BD}(-2;y-1;z+1)$

Tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc khi và chỉ khi

$\begin{cases}AB\perp CD\\ AC\perp BD\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y-z=-5\\ y+2z=-1\end{cases}\Leftrightarrow y=-\frac{11}{5},z=\frac{3}{5}$.

Vậy tọa độ điểm $D$ là $D\left(0;-\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$.

b) Ta có $M(t;0;0)$ nên $\overrightarrow{AM}(t-3;1;0),\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;t-3;2t-5)$. Diện tích tam giác $ABM$ là

$S_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+(t-3)^2+(2t-5)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{f(t)}$.

Với $f(t)=1+(t-3)^2+(2t-5)^2=5t^2-26t+35$ là tam thức bậc hai có hệ số $t^2$ là $5>0$, nên $\min f(t)=f\left(\frac{13}{5}\right)=\frac{6}{5}$, khi $t=\frac{13}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác $ABM$ là $\frac{\sqrt{30}}{10}$, đạt được khi điểm $M\left(\frac{13}{5};0;0\right)$.

**3.** a)Vì $M \in (Oxz)$ nên $M(x;0;z)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(5-x;2;3-z), \overrightarrow{MB}(-1-x;-2;-1-z)$.

Các điểm $A, M, B$ thẳng hàng nên tồn tại $k$ sao cho

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x = k(-1-x) \\ 2 = -2k \\ 3-z = k(-1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ k = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $M(2;0;1)$ và chia đoạn $AB$ theo tỉ số $-1$ ($M$ là trung điểm $AB$).

b) Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $NA + NB \geq AB$. Vì tung độ hai điểm $A, B$ trái dấu, nên hai điểm $A, B$ nằm về hai phía của mặt phẳng $(Oxz)$. Do đó $NA + NB = AB$ khi và chỉ khi $N$ là giao điểm của $AB$ với mặt phẳng $(Oxz)$, hay $N \equiv M(2;0;1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $NA + NB$ là $2\sqrt{17}$ khi $N(2;0;1)$.

c) Ta có $K(t;t;t)$ nên $\overrightarrow{AK}(t-5;t-2;t-3), \overrightarrow{BK}(t+1;t+2;t+1)$.

Vì thế $f(t) = 2KA^2 - 3KB^2 = -3t^2 - 64t + 58 = -3\left(t + \frac{32}{3}\right)^2 + \frac{1198}{3}$ nên $f(t) \leq \frac{1198}{3} \; \forall t \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = -\frac{32}{3}$, hay $K\left(-\frac{32}{3}; -\frac{32}{3}; -\frac{32}{3}\right)$.

**4.** $(P)\colon x + y - z + 1 = 0, A(1;-1;2), \Delta\colon \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$.

a) Gọi $\vec{u}_d(a;\, b;\, c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Có $d // (P) \Rightarrow \vec{u}_d.\vec{n}_{(P)} = 0$ nên $c = a + b$.

$\Delta$ qua $M(-1;\, 0;\, 4)$ và có $\vec{u}_\Delta(2;\, 1;\, -3)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}(-2;\, 1;\, 2)$, $\left[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d\right] = (a + 4b;\, -5a - 2b;\, 2b - a)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$d(d;\, \Delta) = \frac{\left|\left[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d\right]\right|} = \frac{|9a + 6b|}{\sqrt{(a+4b)^2 + (5a+2b)^2 + (2b-a)^2}}$$

Hay $d(d;\,\Delta)=\sqrt{\dfrac{(9a+6b)^2}{27a^2+24ab+24b^2}}\le\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

Khi đó đường thẳng cần tìm là $d:\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$.

b) Gọi góc giữa $\Delta$ và $d$ là $\varphi$.

Giá trị lớn nhất của $\varphi$ là $90^0$ khi $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta,\,\vec{n}_{(P)}\right]=(2;\,-5;\,-1)$.

Đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Giá trị nhỏ nhất của $\varphi$ đạt được khi $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\left[\vec{u}_\Delta,\,\vec{n}_{(P)}\right]\right]=(-6;\,-1;\,-7)$.

Đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{7}$.

c) $\vec{u}_{d'}(1;\,1;\,1)$, $\overrightarrow{AB}(-2;\,2;\,-3)$.

Khoảng cách từ $B$ đến $d$ lớn nhất khi $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{d'},\,\overrightarrow{AB}\right]=(-5;\,1;\,4)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{4}$.

Khoảng cách từ $B$ đến $d$ nhỏ nhất khi

$$\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{d'},\left[\vec{u}_{d'},\,\overrightarrow{AB}\right]\right]=3(1;\,-3;\,2).$$

Phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$.

**Bài 3**

V ì

$M\in\Delta\Rightarrow M\left(t;2t;1-t\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(t-3;2t-2;-t+2\right)$, $\overrightarrow{BM}=(t-1;2t+2;-t)$

$\overrightarrow{CM}=(t-2;2t-1;-t-2)$

**1**. Ta có: $MA+MB=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2+6t+5}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}$$

Ap dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ta có:

$$MA+MB\ge\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t+\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}=\sqrt{38}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t=\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Vậy $M\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

**2**. Ta có: $AM+CM=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2-4t+9}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{96+5\sqrt{42}}{3}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}-t\right)\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}}{2}\left(\frac{1}{3}+t\right)\Leftrightarrow t=\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}}$.

Vậy $M\left(\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}};\frac{2\left(45-\sqrt{42}\right)}{10+3\sqrt{42}};\frac{4\sqrt{42}-35}{10+3\sqrt{42}}\right)$.

**Bài 4** Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Khi đó phương trình của $(\alpha)$ có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.