HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1

1. Ta có: $A(0;0;0), A'(0;0;a), B(0;a;0), B'(0;a;a), C(a;a;0), C'(a;a;a),$ $D(a;0;0), D'(a;0;a)$

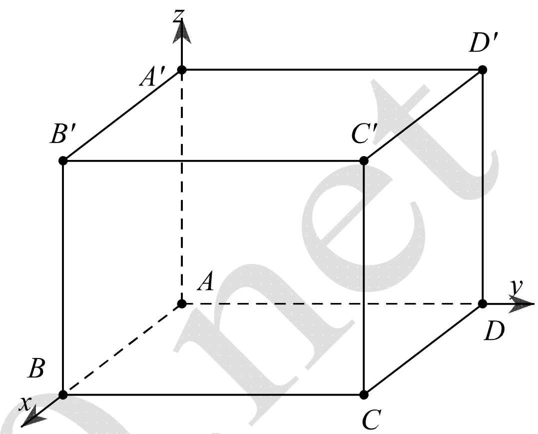
Ta có : $\overrightarrow{B'D'} = (a;-a;0)$,

$\overrightarrow{A'B} = (0;a;-a)$, $\overrightarrow{BB'} = (0;0;a)$,

Suy ra $\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right] = (a^2;a^2;a^2)$

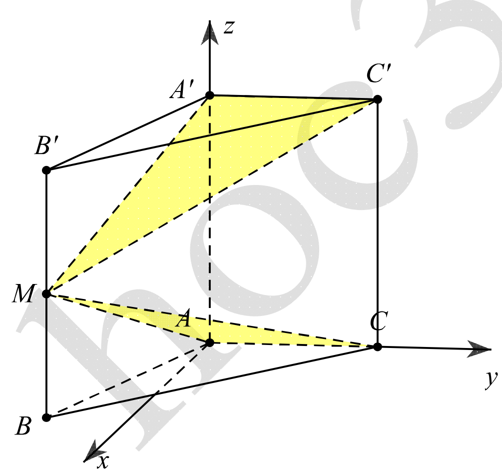
nên $\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{BB'} = a^3 \neq 0$

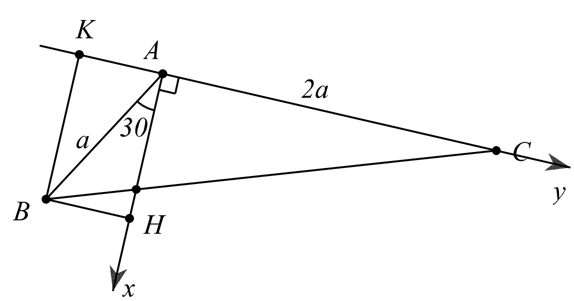
Vậy ba vectơ $\overrightarrow{B'D'}; \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng hay $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau.



$$d\left(B'D', A'B\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right]\right|} = \frac{a^3}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2. Đặt $AA' = 2x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ





Ta có $A(0;0;0), C(0;2a;0), A'(0;0;2x), C'(0;2a;2x)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên các trục Ox, Oy, suy ra

$$AH = AB.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AK = BH = AB.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$$

Do đó $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};2x\right), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right)$

Ta có

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right), \overrightarrow{AC}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\left(2x;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng (MAC)

$\overrightarrow{A'M}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-x\right), \overrightarrow{A'C'}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=\left(2x;0;a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(MA'C')$

Vì $(MAC)\perp(MA'C')$ nên

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 4x^2-3a^2=0\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{3}$

a) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a.2a.\sin 120^0=\frac{3a^3}{2}$$

b) Ta có

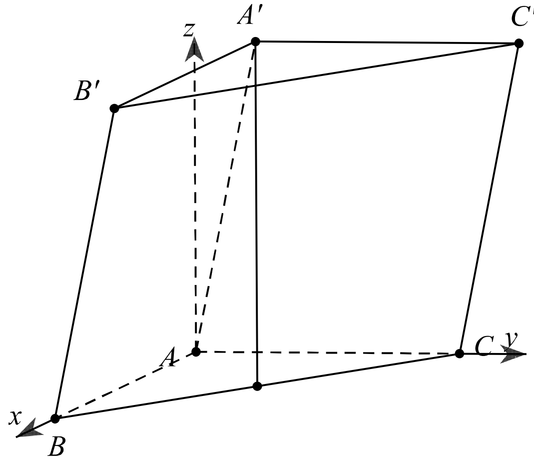
$\overrightarrow{CC'}=\left(0;0;a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{5a}{2};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-\frac{5a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{3a^2}{2};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_3}=\left(5;\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(BCC'B')$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_3}\right|}=\frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{28}}=\frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

3. Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là trung điểm đoạn BC



Ta có tọa độ các đỉnh là: $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a\sqrt{3};0), M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

Vì $AM = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow MA' = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = a\sqrt{3}$,

suy ra $A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

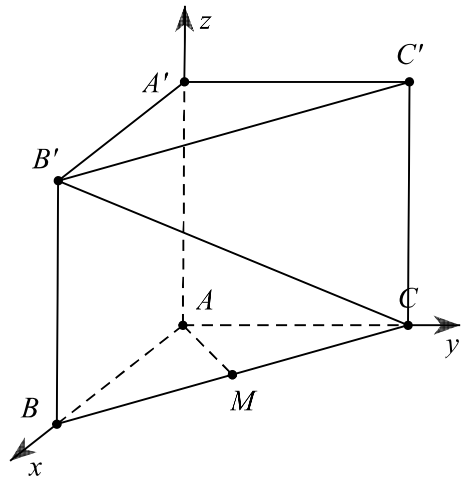
Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow C'\left(\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

Thể tích khối chóp $A'.ABC$: $V = \frac{1}{3}A'M.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$

Vì $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{B'C'} = \left(-a;a\sqrt{3};0\right)$

suy ra $\cos\left(AA',B'C'\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{AA'.B'C'} = \frac{a^2}{2a.2a} = \frac{1}{4}$.

4. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh

là: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $A'(0;0;a\sqrt{2})$, $B'(a;0;a\sqrt{2})$

$C'(0;a;a\sqrt{2})$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

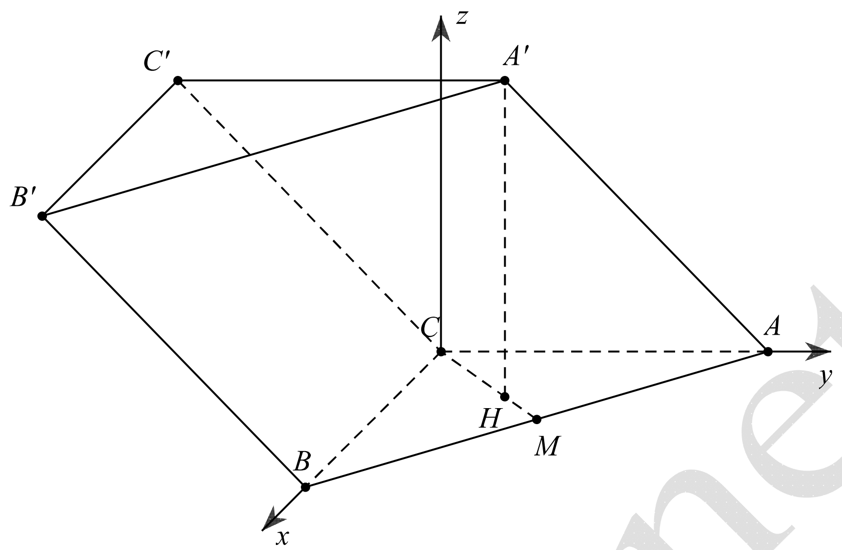
Thể tích khối lặng trụ: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AC} = (0;a;0)$, $\overrightarrow{B'C} = (-a;a;a\sqrt{2})$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(AM,B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{a}{2}$

5. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC

Đặt $BC = x, SH = y; x, y > 0$ suy ra $AC = AB.\cot 60^0 = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Tọa độ các đỉnh là:

$$C(0;0;0), B(x;0;0), A\left(0;\frac{x}{\sqrt{3}};0\right), H\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};0\right), B'\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{2x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của (ABC)

Theo đề bài ta có:

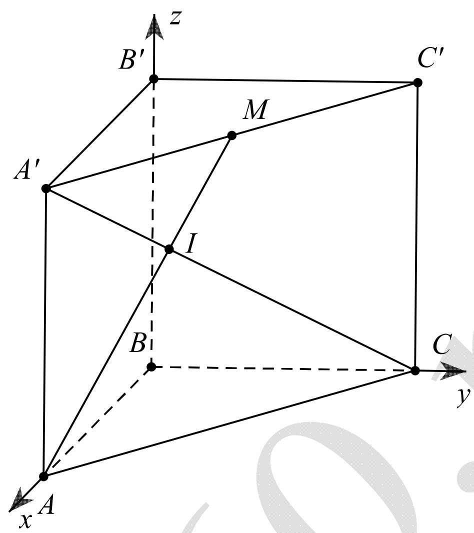
$$\begin{cases} \dfrac{\left|\overrightarrow{BB'}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \sin 60^0 \\ BB' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = a \\ \sqrt{\dfrac{13}{27}x^2 + y^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \dfrac{27a^2}{52} \end{cases}$$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}x.\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{81a^2}{104\sqrt{3}}$

Vậy thể tích khối chóp $A'.ABC$ là:

$V_{A'ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}y.\frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{27a^2}{104\sqrt{3}} = \frac{9a^3}{208}$.

6. Đặt $BC = x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các điểm là:

$B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;x;0)$, $B'(0;2a;0)$, $A'(a;0;2a)$, $C'(0;x;2a)$

Suy ra $\overrightarrow{A'C} = (-a;x;-2a) \Rightarrow A'C^2 = a^2 + x^2 + (2a)^2 = (3a)^2 \Rightarrow x = 2a$

Trung điểm $M\left(\frac{a}{2};a;2a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{2};a;2a\right)$

Phương trình $AM : \begin{cases} x = a - t \\ y = 2t \\ z = 4t \end{cases} \Rightarrow I(a-t;2t;4t) \Rightarrow \overrightarrow{A'I} = (-t;2t;4t-2a)$

Vì $I \in A'C \Rightarrow \frac{-t}{-a} = \frac{2t}{2a} = \frac{4t-2a}{-2a} \Rightarrow t = \frac{a}{3} \Rightarrow I\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)$

Suy ra

$\overrightarrow{BI} = \left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right), \overrightarrow{CI} = \left(\frac{2a}{3};-\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right] = \left(\frac{8a^2}{3};0;-\frac{4a^2}{3}\right)$