HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CẠNH, ĐỈNH VÀ MẶT CỦA HÌNH ĐA DIỆN

Bài 1

1. • Xét hình đa diện (H), khi đó (H) có ít nhất một mặt, giả sử M_1 là một mặt của (H), M_1 là đa giác nên có ít nhất 3 đỉnh, giả sử đó là A, B, C

Vì AB là cạnh chung của đúng hai mặt nên AB là cạnh củau một mặt thứ hai M_2 của (H), suy ra M_2 có thêm ít nhất một đỉnh D

Nếu $D \equiv C$ thì M_1 và M_2 có hai cạnh chung là AB và BC vô lí, do đó $D \neq C$

Dẫn tới hình đa diện (H) có ít nhất 4 đỉnh. Có một hình đa diện có 4 đỉnh đó là hình chóp tam giác. Vậy số đỉnh ít nhất của hình đa diện là 4.

• Xét hình đa diện (H) có một mặt là M_1. Khi đó M_1 có ít nhất ba cạnh liên tiếp là $C_1; C_2; C_3$. Gọi M_2 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_1 với M_1. Trên mặt M_2 còn có ít nhất hai cạnh $C_4; C_5$ khác C_1. Do tính phân biệt của M_2 và M_1 nên $C_4; C_5$ phải khác $C_2; C_3$. Như vậy $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5$ khác nhau.

Gọi M_3 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_2 với M_1. Khi đó M_3 có ít nhất hai cạnh $C_6; C_7$ khác C_2 và phân biệt với $C_1; C_3$.

+) Nếu C_6 khác với $C_4; C_5$ thì hình (H) có ít nhất 6 cạnh.

+) Nếu $C_6 \equiv C_4$ thì do M_3 và M_2 có nhiều nhất một cạnh chung nên C_7 khác $C_4; C_5$ nên (H) có ít nhất 6 cạnh là $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_7$.

+) Nếu $C_6 \equiv C_5$ thì cũng tương tự trên (H) có ít nhất 6 cạnh.

Suy ra hình (H) luôn có ít nhất 6 cạnh. Có một hình đa diện có 6 cạnh đó là hình chóp tam giác. Vậy số cạnh ít nhất của một hình đa diện là 6.

• Vì mỗi mặt của hình đa diện (H) có ít nhất ba cạnh, mà mỗi cạnh có thêm một mặt chung, do đó hình đa diện (H) có ít nhất 4 mặt. Hình chóp tam giác là hình đa diện có 4 mặt. Vậy số mặt ít nhất của hình đa diện là 4.

2. Gọi D, M, C lần lượt là số đỉnh, số mặt và số cạnh của khối đa diện đều loại $\{n; p\}$. Vì mỗi mặt có n cạnh nên M mặt thì có nM cạnh, nhưng mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $2C = nM$.
Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung cho p cạnh nên D sẽ cho pD cạnh , nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của hai mặt suy ra $2C = pD$. Vậy $pD = 2C = nM$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{D}{\frac{1}{p}} = \dfrac{C}{\frac{1}{2}} = \dfrac{M}{\frac{1}{n}} = \dfrac{D - C + M}{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}} = \dfrac{(D - C + M)2pn}{2n + 2p - np}$

Mà $D - C + M = 2$ suy ra $\dfrac{D}{\frac{1}{p}} = \dfrac{C}{\frac{1}{2}} = \dfrac{M}{\frac{1}{n}} = \dfrac{4pn}{2n + 2p - np}$

Vậy : $D = \dfrac{4n}{2n + 2p - np}; C = \dfrac{2np}{2n + 2p - np}; M = \dfrac{4p}{2n + 2p - np}$.

Ta có D, C, M, n, p đều là các số nguyên dương nên $2n + 2p - np > 0,$ mà $2n + 2p - np = n(2 - p) - 2(2 - p) + 4 = -(p - 2)(n - 2) + 4,$ do đó $(p - 2)(n - 2) < 4.$

Vì đa giác đều phải có ít nhất 3 cạnh, mỗi đỉnh cũng có không ít hơn 3 cạnh nên $n \geq 3, p \geq 3 \Rightarrow n - 2, p - 2$ là hai số nguyên dương có tích nhỏ hơn 4, nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp

- $\begin{cases} n - 2 = 1 \\ p - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = p = 3,$ ta có khối đa diện đều loại $\{3; 3\}$, đây chính là khối tứ diện đều.
- $\begin{cases} n - 2 = 2 \\ p - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 4; p = 3,$ ta có khối đa diện đều loại $\{4; 3\}$, đây chính là khối lập phương.
- $\begin{cases} n - 2 = 1 \\ p - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow n = 3; p = 4,$ ta có khối đa diện đều loại $\{3; 4\}$, đây chính là khối bát diện đều (tám mặt đều).
- $\begin{cases} n - 2 = 3 \\ p - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 5; p = 3,$ ta có khối đa diện đều loại $\{5; 3\}$, đây chính là thập nhị diện đều (mười hai mặt đều).

- $\begin{cases} n-2=1 \\ p-2=3 \end{cases} \Rightarrow n=3; p=5,$ ta có khối đa diện đều loại $\{3;5\}$, đây chính là khối nhị thập diện đều (hai mươi mặt đều).

3. Vì mỗi mặt của (H) có đúng p cạnh nên $2q+1$ mặt thì có $(2q+1)p$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh là $c=\dfrac{p(2q+1)}{2}$, vì c là số nguyên nên p phải là số chẵn.

4. a) Do mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh, nên số cạnh của m mặt không nhỏ hơn $3m$. Mà mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $c \geq \dfrac{3m}{2} \Leftrightarrow 2c \geq 3m > 2m \Leftrightarrow c > m$.

b) Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và qua hai đỉnh có đúng một cạnh nên $2c \geq 3d > 2d \Leftrightarrow c > d$.

5. Xét một hình đa diện có một mặt M_i với số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4. Khi đó, do mỗi đỉnh của mặt M_i là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh, nên tại mỗi đỉnh của nó có thêm ít nhất một cạnh đi qua, khi đó số cạnh của hình đa diện sẽ lớn hơn hoặc bằng 8. Vì vậy, hình đa diện (H) có số cạnh là 7 thì không tồn tại mặt nào có số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 4, tức là các mặt của hình đó phải là các tam giác.

Gọi M, C là số mặt và số cạnh của hình đa diện (H). Do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $3M = 2C = 14 \Rightarrow M = \dfrac{14}{3}$ (vô lý, do M là số nguyên dương).Vậy không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

6. Xét khối đa diện (H) có số đỉnh là D và số cạnh xuất phát từ các đỉnh lần lượt là $C_1;C_2;...;C_D$, trong đó C_k là các số nguyên dương với $k=\{1;2;...;D\}$. Vì số đỉnh của khối đa diện là D nên số cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh phải nhỏ hơn D, do đó $C_k < D$. Như vậy tập C_k có D phần tử mà chỉ nhận các giá trị từ 1 đến D, do đó theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai phần tử có giá trị bằng nhau.

Vậy một khối đa diện bất kỳ, luôn tồn tại hai đỉnh mà số cạnh xuất phát từ hai đỉnh đó bằng nhau.

Bài 2

1. Gọi $Đ$ là số đỉnh của đa diện và C là số cạnh của đa diện ấy .Vì mỗi đỉnh đều là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh chỉ qua hai đỉnh nên $3Đ = 2C \Rightarrow 3Đ$ là số chẵn $\Rightarrow Đ$ là số chẵn.

2. Giả sử A là đỉnh chung của ba cạnh AB, AC và AD của khối đa diện. Khi đó mặt của đa diện chứa cạnh AB, AC chính là tam giác ABC; mặt của đa diện chứa cạnh AC, AD chính là tam giác ACD; mặt của đa diện chứa cạnh AD, AB chính là tam giác ABD. Vì BC, BD, DC là cạnh của đa diện đó nên tam giác BCD là mặt của đa diện . Vậy đa diện đã cho được giới hạn bởi 4 mặt ABC, ACD, ADB và BCD nên đa diện đó là một khối tứ diện.

3. Giả sử tứ diện $ABCD$ có tâm đối xứng là O.

Nếu O thuộc một mặt phẳng chứa một mặt của tứ diện thì mặt đó là hình có tâm đối xứng. Điều này không thể xảy ra vì mặt của tứ diện là một tam giác mà tam giác là hình không có tâm đối xứng .

Vậy O không thuộc các mặt phẳng chứa mặt của tứ diện. Gọi A', B' lần lượt là hai điểm đối xứng của A và B qua O thì A', B' lần lượt thuộc hai mặt BCD và ACD của tứ diện. Vì đoạn $A'B'$ là hình đối xứng của đoạn AB qua O nên $A'B' /\!/\!= AB$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành

$\Rightarrow BA' /\!/ AB'$

Nếu A' không trùng B thì B' không trùng A, khi đó hai mặt phẳng (BCD) và (ACD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song BA' và AB' nên giao tuyến CD của chúng cũng song song với BA', điều này không thể xảy ra vì A' thuộc tam giác BCD, do đó A' trùng B và B' trùng A, khi đó O là trung điểm của AB tức là O thuộc một mặt của tứ diện (điều mâu thuẩn).

Vậy tứ diện không có tâm đối xứng .

Bài 3

1. Xét khối đa diện (H) có một mặt là M_1. Gọi A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của M_1. Ta có AB, BC là hai cạnh liên tiếp của (H).

Vì một cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt, nên tồn tại mặt M_2 khác M_1 và có chung cạnh AB với M_1. Mặt M_2 phải có ít nhất một đỉnh khác với các đỉnh A, B.

Giả sử $D \equiv C$ thì M_2 và M_1 có hai cạnh chung là AB và $BC(BD)$, tức là hai mặt trùng nhau, điều này mâu thuẫn với M_2 khác M_1. Vậy D phải khác C, tức là đa diện (H) phải có ít nhất bốn đỉnh.

2. Xét hình đa diện (H) có một mặt là M_1. Khi đó M_1 có ít nhất ba cạnh liên tiếp là $C_1; C_2; C_3$. Gọi M_2 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_1 với M_1. Trên mặt M_2

còn có ít nhất hai cạnh $C_4;C_5$ khác C_1. Do tính phân biệt của M_2 và M_1 nên $C_4;C_5$ phải khác $C_2;C_3$. Như vậy $C_1;C_2;C_3;C_4;C_5$ khác nhau.

Gọi M_3 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_2 với M_1. Khi đó M_3 có ít nhất hai cạnh $C_6;C_7$ khác C_2 và phân biệt với $C_1;C_3$.

- Nếu C_6 khác với $C_4;C_5$ thì hình (H) có ít nhất 6 cạnh.
- Nếu $C_6 \equiv C_4$ thì do M_3 và M_2 có nhiều nhất một cạnh chung nên C_7 khác $C_4;C_5$ nên (H) có ít nhất 6 cạnh là $C_1;C_2;C_3;C_4;C_5;C_7$.
- Nếu $C_6 \equiv C_5$ thì cũng tương tự trên (H) có ít nhất 6 cạnh.

Vậy hình (H) luôn có ít nhất 6 cạnh.

3. Giả sử mỗi đỉnh của khối đa diện là đỉnh chung của không ít hơn 6 cạnh. Khi đó, gọi $C_1, C_2, ..., C_D$ lần lượt là số cạnh xuất phát từ các đỉnh của khối đa diện thì $C_k \geq 6$ với mọi $k = \{1;2;...;D\}$.

Ta có mỗi cạnh đi qua hai đỉnh nên

$$C = \frac{C_1 + C_2 + ... + C_D}{2} \geq \frac{6D}{2} \Rightarrow D \leq \frac{C}{3}.$$

Chứng minh tương tự ta có $M \leq \frac{2C}{3} \Rightarrow D + M \leq C$. Điều này không thể xảy ra, nên bài toán được chứng minh.

Bài 4

1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau (c.c.c)

$\Rightarrow AN = BN$ (hai đường trung tuyến tương ứng trong hai tam giác ACD, BCD)

$\Rightarrow$ Tam giác ANB cân tại N

$\Rightarrow NM$ là đường trung trực của AB.

Tương tự MN cũng là đường trung trực của CD.

Thực hiện đối xứng trục MN ,ta có

$A \to B, B \to A, C \to D, D \to C$ (kí hiệu $A \to B$ có nghĩa là B là ảnh của A qua phép biến hình)

Suy ra $A' = hcA_{/CD} \to B' = hcB_{/CD}$

$C' = hcC_{/AB} \to D' = hcD_{/CD}$

$D' = hcD_{/CD} \to C' = hcC_{/AB}$

$\Rightarrow A'C' \to B'D'$ và $A'D' \to B'C \Rightarrow A'C' = B'D'$ và $A'D' = B'C'$.

2.