HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 1. CÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTƠ

Bài 1

1. a) Ta có: $\vec{a}=(2;3;-5), \vec{b}=(0;-3;4),\ \vec{c}=(-1;-2;0)$

Suy ra $3\vec{a}=(6;9;-15),\ 2\vec{b}=(0;-6;8)\Rightarrow \vec{x}=(6;3;-7)$

Do đó: $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{6^2+3^2+(-7)^2}=\sqrt{94}$

b) Ta có: $2\vec{b}-\vec{c}=(1;-4;8)$, nên $\vec{y}$ vuông góc với $2\vec{b}-\vec{c}$ khi và chỉ khi

$\vec{y}.\left(2\vec{b}-\vec{c}\right)=0\Leftrightarrow 1.(2x-1)-4.(-x)+8(3x+2)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

c)

Cách 1: Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-3;-8;-6)\Rightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=3+16=19\neq 0$

Nên ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Cách 2. Giả sử ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. Khi đó tồn tại hai số thực x, y sao cho $\vec{a}=x.\vec{b}+y.\vec{c}$ (1)

Mà $x\vec{b}+y\vec{c}=(-y;-3x-2y;4x)$ nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}-y=2\\-3x-2y=3\\4x=-5\end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Giả sử $\vec{u}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ (2)

Do $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=(2m-p;3m-3n-2p;-5m+4n)$ nên (2) tương đương với

$$\begin{cases}2m-p=3\\3m-3n-2p=7\\-5m+4n=-14\end{cases}\Leftrightarrow m=2, n=-1, p=1$$

Vậy $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

2. a) Ta có $\vec{a}=(2;3;-1),\ \vec{b}=(-1;0;2),\ \vec{c}=(0;2;-3)$

b) Ta có: $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=(1;-2;16)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=3\sqrt{29}$.

c) Ta có: $\vec{v} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1(3x-1)+2(3-x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$.

d) Giả sử: $\vec{x} = k.\vec{a} + p.\vec{b} + l.\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} k-p=3 \\ 3k+2l=2 \\ -k+2p-3l=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{32}{11} \\ p = -\frac{1}{11} \\ l = -\frac{37}{11} \end{cases}$

Vậy $\vec{x} = \frac{32}{11}\vec{a} - \frac{1}{11}\vec{b} - \frac{37}{11}\vec{c}$.

Bài 2

1. Do $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$ nên ta có $\vec{a}.\vec{b} = 9$.

a) Sử dụng công thức

$|m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{(m\vec{a}+n\vec{b})^2} = \sqrt{m^2\vec{a}^2 + 2mn.\vec{a}\vec{b} + n^2\vec{b}^2}$.

Ta tính được $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{39}$, $|5\vec{a}+2\vec{b}| = 2\sqrt{129}$, $|3\vec{a}-2\vec{b}| = 6$.

b) Sử dụng công thức $\left|\left[m\vec{a}, n\vec{b}\right]\right| = |m.n|.|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(m\vec{a}, n\vec{b})$.

Với chú ý $(\vec{a}, 3\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$, $(5\vec{a}, -2\vec{b}) = 180^0 - (\vec{a}, \vec{b}) = 150^0$.

2. a) Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (-2m; -m^2 - m; -m-5)$ nên ba véc tơ đã cho đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0$ hay $-2m.1 + (-m^2 - m).(-1) + (-m-5).2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2; m = 5$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -2; m = 5$.

b) Ta có $\overrightarrow{CA}(-3; -4; m-1), \overrightarrow{CB}(4-m; 0; 2-2m)$, $\overrightarrow{CD}(1-m; 3+m; m-1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = (8(1-m); (m-1)(m+2); 4(m-4))$.

Vậy bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CD} = 0$, hay

$8(1-m)^2 + (m-1)(m+2)(3+m) + 4(m-1)(m-4) = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2(m+18) = 0 \Rightarrow m = 1;\ m = -18$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 1;\ m = -18$.

c) Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ nên

$$\cos 60^0=\frac{2m+2m+(2m-1).(-1)}{\sqrt{2^2+m^2+(2m-1)^2}.\sqrt{m^2+2^2+(-1)^2}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2m+1}{\sqrt{5m^2-4m+5}.\sqrt{m^2+5}}$$

Với $m\ge-\frac{1}{2}$, nên bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$5m^4-4m^3+14m^2-36m+21=0\Leftrightarrow(m-1)^2(5m^2+6m+21)=0\Leftrightarrow m=1$$

Giá trị cần tìm của m là $m=1$.

Bài 3

1. Ta có $\overrightarrow{BC}(3;2;6)\Rightarrow BC=7$ nên $AK=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{14}{3}$.

Gọi $A\left(x;\frac{1}{3};z\right)$ thì $\overrightarrow{AK}\left(1-x;2;3-z\right)$. Do đó từ $\begin{cases}AK\perp BC\\ AK=\frac{14}{9}\end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases}3x+6z=25\\ (1-x)^2+(3-z)^2=\frac{160}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+6z=25\\ 45z^2-318z+405=0\end{cases}$$

Từ đó ta có $A\left(-\frac{37}{15};\frac{1}{3};\frac{25}{5}\right)$ (loại) hoặc $A\left(5;\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ (thỏa mãn).

2. Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ B đến AC.

Ta có $\overrightarrow{CL}=t\overrightarrow{CA}$ nên $L\left(2+3t;3-\frac{8}{3}t;5-\frac{10}{3}t\right)$.

Do đó $\overrightarrow{BL}\left(3+3t;2-\frac{8}{3}t;6-\frac{10}{3}t\right),\overrightarrow{CA}\left(3;-\frac{8}{3};-\frac{10}{3}\right)$ nên

$$\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{5}\Rightarrow L\left(\frac{19}{5};\frac{7}{5};3\right).$$

3. $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right),H\left(3;\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$.

4. $G\left(2;\frac{13}{9};\frac{17}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{HG}\left(-1;\frac{1}{9};-\frac{4}{9}\right)=2\overrightarrow{GI}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{18};-\frac{2}{9}\right)$.

Bài 4 $A(2;4;1),B(0;4;4),C(0;0;1)$

1. Gọi $D(x;y;z)$. Từ $DA=BC,DB=CA,DC=AB$ ta có hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25\\ x^2+(y-4)^2+(z-2)^2=20\\ x^2+y^2+(z-1)^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(1-y)\\ z=\frac{12-4y}{3}\\ x^2+y^2+(z-1)^2=13\end{cases}$$

Suy ra $D(2;0;4), D\left(-\frac{166}{61};\frac{144}{61};\frac{52}{61}\right)$. Chọn điểm $D(2;0;4)$.

2. Tọa độ trọng tâm của tứ diện là $G\left(1;2;\frac{5}{2}\right)$.

Tính được $GA = GB = GC = GD = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy G cách đều các đỉnh của tứ diện (là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện).

3. Ta có $M\left(1;4;\frac{5}{2}\right)$, $N\left(1;0;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(0;-4;0)$.

Do đó $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0$. Hay MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

4. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt đối diện.

Ta có $AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{2\sqrt{29}}{3}$.

5. Ba góc ở mỗi đỉnh của tứ diện là ba góc của một tam giác, nên tổng các góc ở mỗi đỉnh là 180^0.

Bài 5

1. Ta có $\overrightarrow{BA} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{BC} = (1;-2;3)$, $\overrightarrow{BD} = (4;2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (3;4;1)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-14;8;10)$

Do đó $\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = 32 \neq 0 \Rightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng.

2. Ta có: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + 8^2 + 10^2} = 3\sqrt{10}$

Vì $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BH.CD$ nên suy ra $BH = \frac{2S_{\Delta BCD}}{CD} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{65}}{13}$.

3. Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{16}{3}$.

Gọi $h = d(A,(BCD)) \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{16}{3\sqrt{10}}\frac{8\sqrt{10}}{15}$.

4. Gọi $E(x;y;z)$.

$ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 2 = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$.

Vậy $E(1;0;3)$.

5. Ta có:

$\overrightarrow{AC}=(0;-4;0)\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-8\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}\right|}{\left|AC.BD\right|}=\dfrac{8}{4.6}=\dfrac{1}{3}$.

6. Ta có $M\in Oy\Rightarrow M(0;y;0)$. Tam giác BMC cân tại

$M\Leftrightarrow MC^2=MB^2\Leftrightarrow (-1)^2+y^2+3^2=(y+2)^2\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $M\left(0;\dfrac{3}{2};0\right)$.

7. Ta có:

$A'\left(\dfrac{2}{3};0;-\dfrac{2}{3}\right),\ G\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\left(\dfrac{2}{3};-2;-\dfrac{2}{3}\right),\ \overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Mà $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{-2}{\frac{-3}{2}}=\dfrac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG}\Rightarrow A, A', G$ thẳng hàng.

Bài 6

1. Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

Khi đó: $\begin{cases}K\in BC\\ AK\perp BC\end{cases}$

- $K\in BC$ nên $\overrightarrow{BK}=t.\overrightarrow{BC}$, do đó

$$\begin{cases}x_K+1=t(1+1)\\ y_K-2=t(1-2)\\ x_K-0=t(-2-0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_K=2t-1\\ y_K=2-t\\ x_K=-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Rightarrow K(2t-1;2-t;-2t).$$

- $AK\perp BC\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0$. Vì $\overrightarrow{AK}(2t-3;-1-t;-1-2t)$ nên

$$(2t-3).2+(-1-t).(-1)+(-1-2t).(-2)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$$

Tọa độ điểm K cần tìm là $K\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

2. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC Ta có

$\overrightarrow{AH}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BH}(x+1;y-2;z),\ \overrightarrow{AB}(-3;-1;-1),\overrightarrow{AC}(-1;-2;-3),\overrightarrow{BC}(2;-1;$

Tích có hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là