HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1

1. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AB = AC$. Đặt $AB = AC = x$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + x^2 - 2.x.x.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}}\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}$.

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{24}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72}.$$

2. . (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H là trung điểm của AC thì $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Đặt $SH = h$

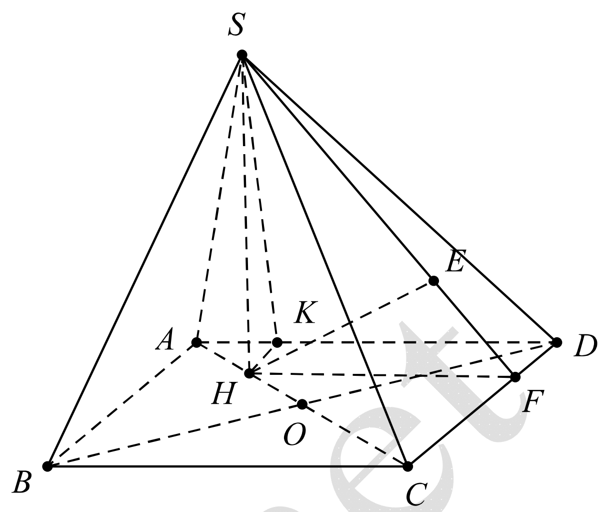
Ta có $SC^2 = HS^2 + HC^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$, $SB^2 = HS^2 + HB^2 = h^2 + \frac{3a^2}{4}$

Mà $SC^2 = BS^2 + BC^2 - 2BS.BC\cos 60^0$

$$\Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{3a^2}{4} + a^2 - 2a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}.\frac{1}{2} \Leftrightarrow h = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

3. Kẻ $HK \perp AD \Rightarrow SKH = ((SAD),(ABCD)) = 60^0$



Ta có: $HK = \frac{1}{4}CD = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow SH = HK\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$,

$S_{ABCD} = a^2$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Do $AB//(SCD)$

$\Rightarrow d\left(AB, SC\right) = d(A,(SCD))$

$= \frac{4}{3}d\left(H,(SCD)\right)$

Vẽ $HF \perp CD, HE \perp SF \Rightarrow HE = d(H,(SCD))$, $HF = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{4}a$

Trong tam giác SHF ta có: $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{4}$.

4. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Do hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ nên suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Kẻ $OE \perp AB, OK \perp SE \Rightarrow OK = d\left(O,(SAB)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vì $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.DB = 2a^2\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

5. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A.

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB \Rightarrow SB \perp (AHK)$

Do đó $AHK = \left((SAB),(SBC)\right) = 60^0$.

Trong tam giác vuông AKH ta có: $\frac{AK}{AH} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AH$

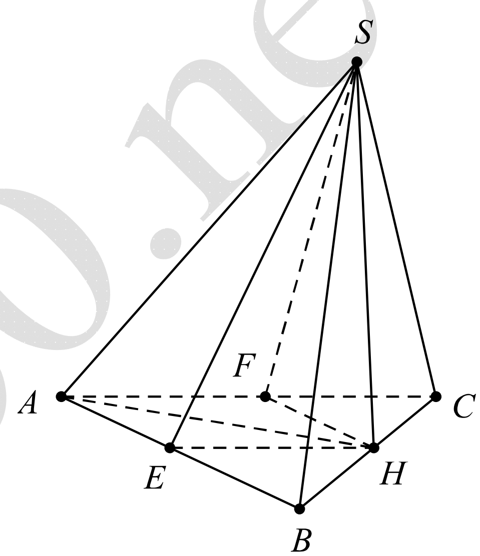
Suy ra

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{4}{3AH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA.CB=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

6. Gọi H là hình chiếu của S lên BC; E,F lần lượt là hình chiếu của H lên AB,AC suy ra $SH\perp(ABC)$ và $HE=HF$ nên AH là phân giác của góc BAC



Ta có: $\frac{AB}{HF}=\frac{BC}{HC}=1+\frac{BH}{CH}=1+\frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow HF=\frac{AB.AC}{AB+AC}=\frac{2a}{3}$

Suy ra $SH=HF.\tan 60^0=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$,

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=a^2$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

7. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Ta có $BA=BC$ nên tam giác ABC vuông cân tại B.

Vì $BC\perp BA, BC\perp AS$ nên

$BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AB'$,

$AB'\perp SB\Rightarrow AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp SC.$

$B'C'\perp SC\Rightarrow SC\perp(AB'C').$

Thể tích khối chóp $S.AB'C'$ là:

$V=\frac{1}{3}SC'.S_{AB'C'}=\frac{1}{6}SC'.AB'.B'C'.$

Ta có: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{SA^2+BC^2+BA^2}=a\sqrt{3}.$

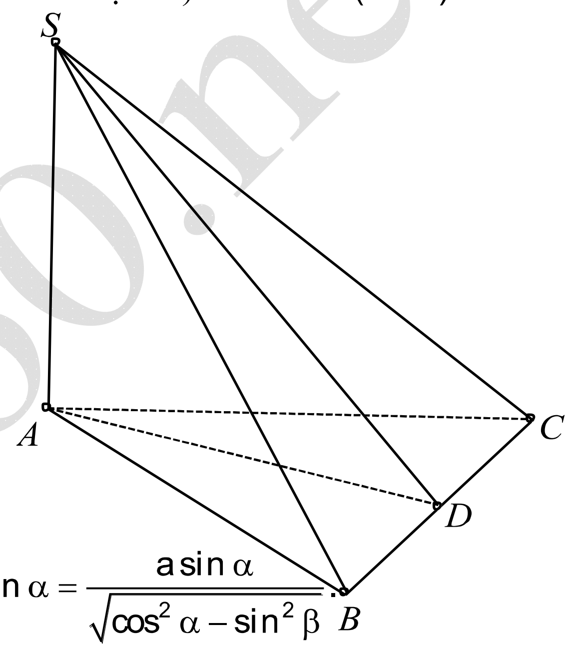
Tam giác SAC' vuông tại A, đường cao AC' nên $SC' = \dfrac{SA^2}{SC} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $AB' = SB' = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $B'C'^2 = SB'^2 - SC'^2 = \dfrac{a^2}{6} \Rightarrow B'C' = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy thể tích cần tìm là $V = \dfrac{1}{6}SC'.AB'.B'C' = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3}{36}$.

8. Vì hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm A nên $\alpha = SBA$. Mặt khác, $SA \perp BC$, $AD \perp BC$ (tam giác ABC cân tại A) nên $BC \perp (SAD)$ do đó $\beta = BSD$.



Từ các tam giác vuông SAB, SDB ta có $AB = SB.\cos\alpha, BD = SB.\sin\beta$.

Mà $AB^2 = AD^2 + DB^2$ nên $SB^2.\cos^2\alpha = SB^2.\sin^2\beta + a^2$

$\Rightarrow SB = \dfrac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

Do đó $BD = \dfrac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}, SA = SB.\sin\alpha = \dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

Thể tích khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{6}SA.AD.BC$,

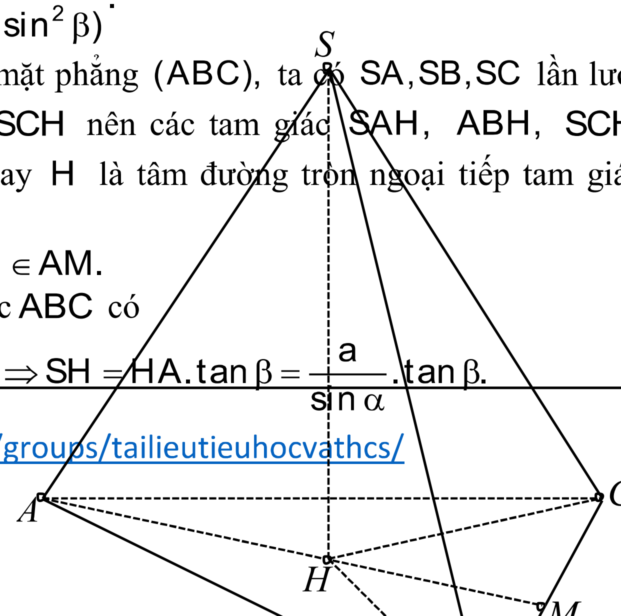
hay $V = \dfrac{1}{3}.SA.AD.BD = \dfrac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}$.

9. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), ta có SA, SB, SC lần lượt tạo với đáy các góc SAH, SBH, SCH nên các tam giác SAH, ABH, SCH bằng nhau nên $HA = HB = HC$, hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC thì $H \in AM$.

Theo định lý hàm số sin cho tam giác ABC có

$\dfrac{BC}{\sin A} = 2R = 2HA \Rightarrow HA = \dfrac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow SH = HA.\tan\beta = \dfrac{a}{\sin\alpha}.\tan\beta$.

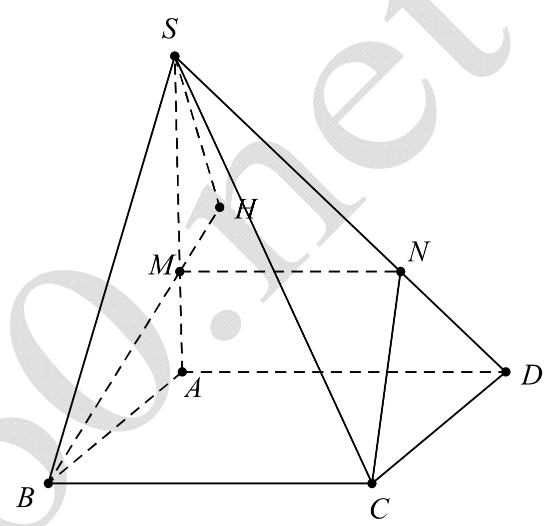


Mặt khác, tam giác ABC cân tại A nên $AB = BM.\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}.\cot\frac{\alpha}{2}$, do đó diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{a^2}{4}.\cot\frac{\alpha}{2}$.

Thể tích của khối chóp cần tìm là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\tan\beta}{48\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

10. Ta có: $MN // AD; BC \perp SA$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp BM \Rightarrow BCMN$ là hình thang vuông tại B và M.



$SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$,

$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{4a}{3}$,

$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Diện tích hình thang $BCMN$:

$S = \frac{BC + MN}{2}BM = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$

Hạ $SH \perp BM \Rightarrow SH \perp (BCMN) \Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp $S.BCMN$.

Do $\Delta MHS \sim \Delta MAB$ nên suy ra:

$MH.MB = MS.MA \Rightarrow MH = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow BH = BM + MH = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy $V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}S.SH = \frac{1}{3}.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}}.a = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$.

Bài 2

1. Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 9a$

Nên diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = \sqrt{9a.4a.3a.2a} = 6a^2\sqrt{6}$

Kẻ đường cao AK của tam giác ABC và đường cao AH của tam giác SAK

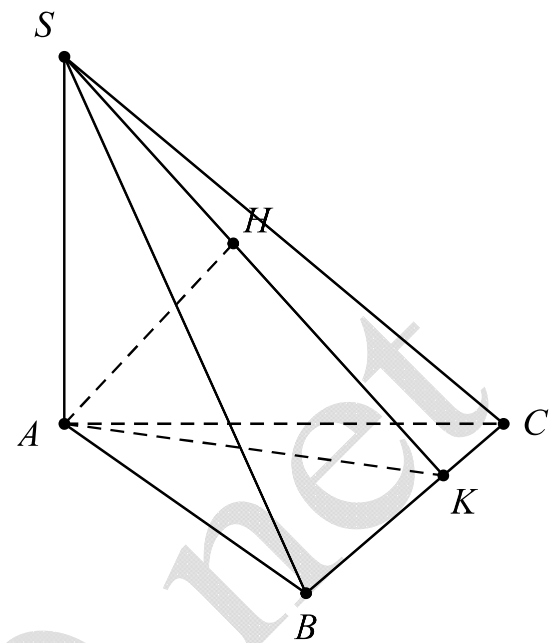
Ta có: $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH = d(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$,

$AK = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = 2a\sqrt{6}$

Trong tam giác vuông SAK,

ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2}$



$$\Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AK^2} = \frac{9}{24a^2} - \frac{1}{24a^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.6a^2\sqrt{6} = 6a^3\sqrt{2}$.

2. Gọi O là tâm của đáy, I là trung điểm BC

a) Ta có $BC \perp (SIO) \Rightarrow SIO = \left((SBC),(ABC)\right) = 60^0$

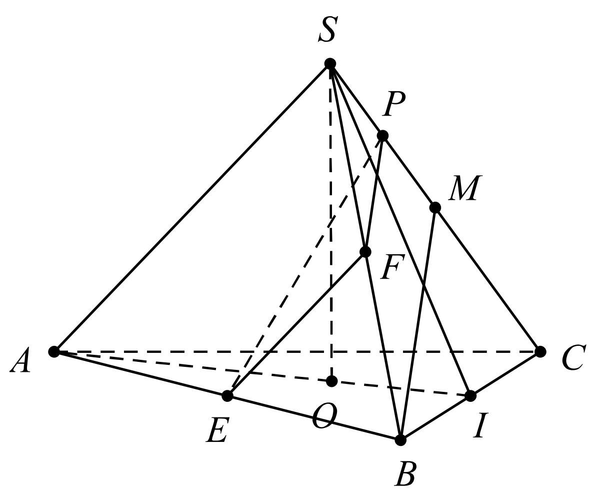
$IO = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow SO = IO\tan 60^0 = \dfrac{a}{2}$,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC}$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$



b) Gọi E, F, P lần lượt là trung điểm của AB, BS, SM, ta có:

$\left(SA, BM\right) = \left(EF, PF\right) \Rightarrow EF \perp FP$. Đặt $AB = x$

Ta có: $EF = a,\ BM^2 = \dfrac{2(BS^2 + BC^2) - SC^2}{4} = \dfrac{x^2 + 2a^2}{2}, FP = \dfrac{BM}{2}$

$$EM^2 = \frac{2(EC^2 + ES^2) - SC^2}{4} = \frac{2\left(\frac{3x^2}{4} + SA^2 - AE^2\right) - SC^2}{4} = \frac{4a^2 + x^2}{4}$$

$$EP^2 = \frac{2(SE^2 + EM^2) - SM^2}{4} = \frac{9a^2}{16}$$

Tam giác EFP vuông tại F nên

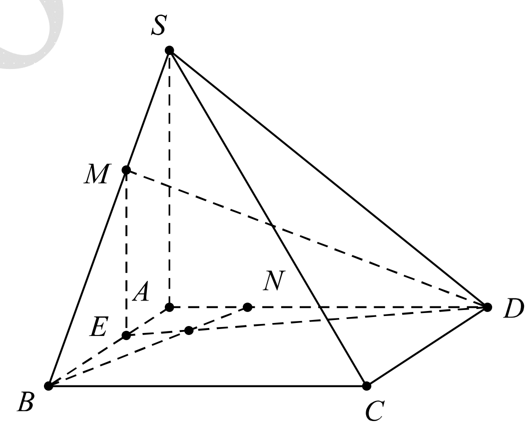
$EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{2}$

$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{9}\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^3}{3}$.

3. Vẽ $ME // SA \Rightarrow ME \perp (ABCD)$, do đó $DM \perp BN \Leftrightarrow DE \perp BN$.

Đặt $AN = xAD$



$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$

$BN \perp DE \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -3xAD^2 - AB^2 + (3 + x)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

Ta có tam giác ABD đều nên:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos BAD = a.a.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$

Nên ta có: $-3xa^2 - a^2 + \dfrac{a^2(3 + x)}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5} \Rightarrow AN = \dfrac{2}{5}AD = \dfrac{2a}{5}$

Ta có: $ME = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3},\ S_{\Delta ABN} = \dfrac{1}{2}AB.AN.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{10}$

Suy ra $S_{\Delta BND} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABN} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{20}$

Vậy $V_{BDMN} = \dfrac{1}{3}ME.S_{\Delta BND} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{20} = \dfrac{a^3}{10}$.

4. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$, tương tự như ví dụ trên ta cũng có I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang $ABCD$.

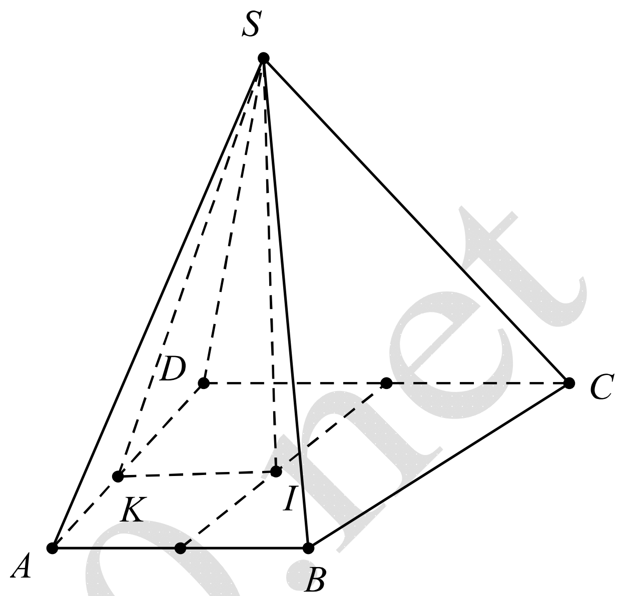
Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên

$AB + DC = AD + BC = 5a$

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S = \frac{1}{2}(AB + DC)AD$

$= \frac{1}{2}.5a.2a = 5a^2$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang



$ABCD$ thì $p = \dfrac{AB + DC + AD + BC}{2} = \dfrac{10a}{2} = 5a$,

$S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{5a^2}{5a} = a \Rightarrow IK = r = a$.

Tam giác SAD đều và có cạnh $2a$ nên

$SK = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \sqrt{SK^2 - IK^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{2}.5a^2 = \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{3}$.

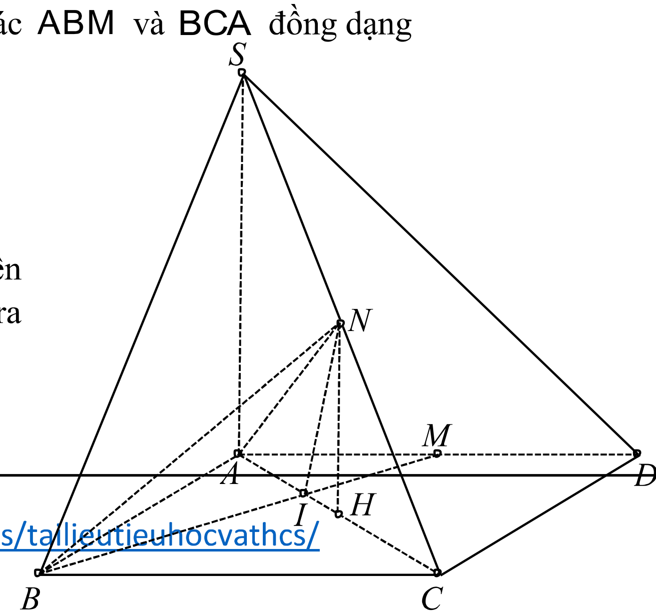
5. Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{BA}{BC}$ nên hai tam giác ABM và BCA đồng dạng

$\Rightarrow ABM = BCA$

$\Rightarrow ABM + BAC = BCA + BAC = 90^0$

$\Rightarrow AIB = 90^0 \Rightarrow MB \perp AC$

Mặt khác, SA vuông góc với đáy nên $SA \perp BM$, do đó $BM \perp (SAC)$ suy ra $(SBM) \perp (SAC)$.



Vì N là trung điểm của SC, nên gọi H là trung điểm của AC thì NH là đường trung bình của tam giác SAC.

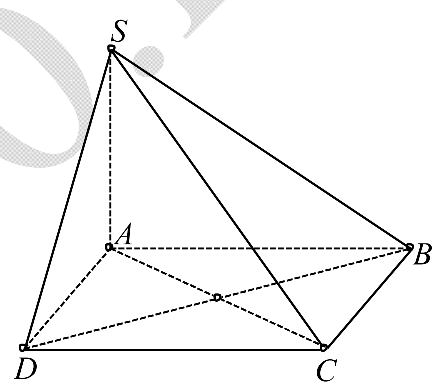
Ta có $NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$, $NH // SA$ nên $NH \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp $ABIN$ là $V_{NAIB} = \frac{1}{3} NH.S_{ABI}$.

Trong tam giác AMB ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow S_{ABI} = \frac{1}{2} IA.IB = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Vậy thể tích khối chóp $ABIN$ là $V_{NAIB} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

6. Hình chiếu của SC lên mặt đáy là AC nên $SCA = 45^0$. Mặt khác $CB \perp (SAB)$ nên $CSB = 30^0$.



Tam giác vuông SBC có $CSB = 30^0$ nên $BC = \frac{1}{2} SC$.

Tam giác vuông SAC có $SAC = 45^0$ nên $SA = AC = \frac{\sqrt{2}}{2} SC$.

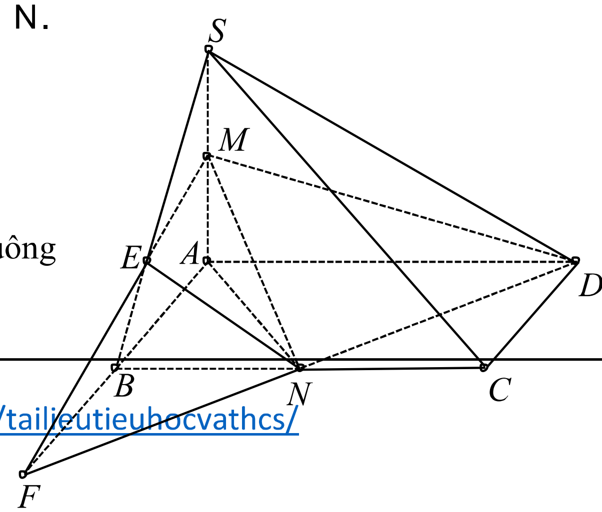
Từ tam giác vuông ABD ta có $BA^2 + BC^2 = AC^2$ nên $SC = 2a$, suy ra $BC = a$ và $SA = a\sqrt{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

7. Dễ dàng tính được $AN = DM = a\sqrt{2}$, mà $AD = 2a$ nên tam giác AND vuông tại N. Theo định lí ba đường vuông góc thì $DN \perp MN$, suy ra

$$\tan DMN = \frac{DN}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ta được $MN = a\sqrt{6}$ nên từ tam giác vuông AMN thì $AM = 2a \Rightarrow SA = 4a$.



Gọi $F = AB \cap DN$ thì B là trung điểm $AF \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SAF nên $d(E,(ABC)) = \frac{1}{3}SA = \frac{4}{3}a.$

$V_{M.AFD} = \frac{1}{3}MA.S_{ADF} = \frac{4}{3}a^3, V_{E.BFN} = \frac{1}{3}d(E,(ABC)).S_{BFN} = \frac{2}{9}a^3$

Thể tích khối đa diện $ADM.BNE$ là $V_{ADM.BNE} = V_{M.AFD} - V_{E.BFN} = \frac{10}{9}a^3.$

Mà $V_{S.ABND} = 2a^3$, nên $V_{S.DMEN} = V_{S.ABND} - V_{ADM.BNE} = \frac{8}{9}a^3.$

8. a) Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, theo tính chất của hình chóp đều ta có $SO \perp (ABCD)$.

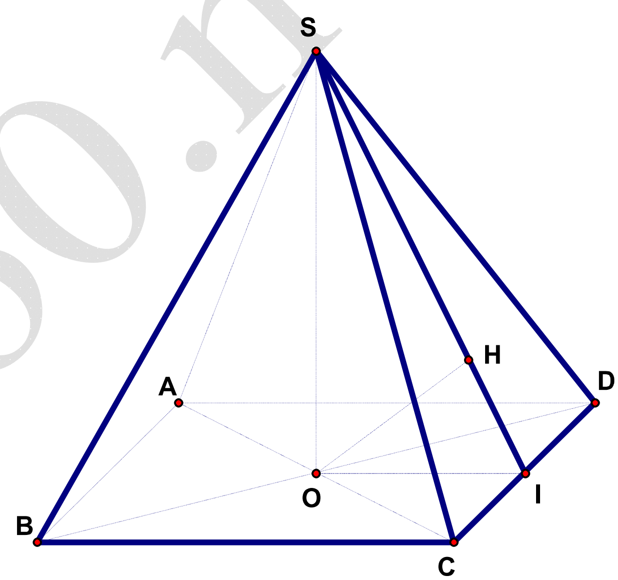
Trong tam giác vuông SOC,

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$



Tính diện tích toàn phần của hình chóp $S.ABCD$: $S_{tp} = 4S_{SBC} + S_{ABCD}$

Vì tam giác SBC có các cạnh đều bằng a nên là tam giác đều suy ra

$S_{SBC} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{tp} = a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2\left(\sqrt{3}+1\right).$

Tính diện tích hai mặt chéo SAC và SBD.

Hai mặt chéo SAC và SBD bằng nhau:

$$S_{SAC} = \frac{1}{2}AC.SO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b) . Tính $d\left(A,(SCD)\right)$.

Cách 1. Ta có $V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.