HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 6. TỈ SỐ THỂ TÍCH

Bài 1

1. a. Ta có $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}SA.AB.AC=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

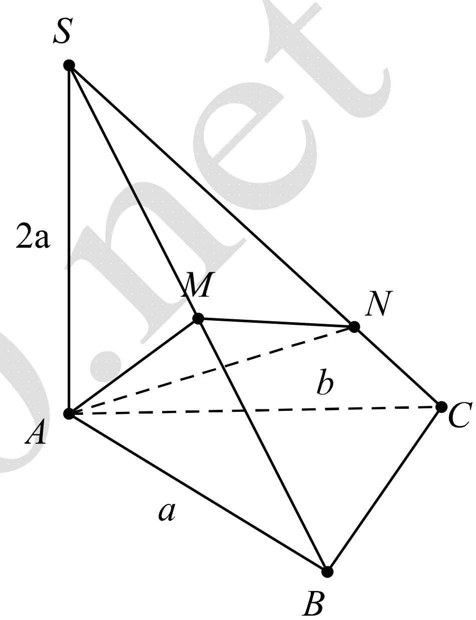
Ap dụng công thức tỉ số thể tích

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA.AM.SN}{SA.SB.SC}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{2x}{3}$$

Do đó: $V_{S.AMN}=\frac{2x}{3}V_{S.ABC}=\frac{2xa^3\sqrt{3}}{9}$.

b. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau

$$\Leftrightarrow\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2x}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$



2. Vì $(AHK)\perp SC\Rightarrow AH\perp SC$, nhưng $BC\perp(SAB)\Rightarrow AH\perp BC$ do đó ta có $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SB.$

Tam giác vuông SAB với đường cao AH

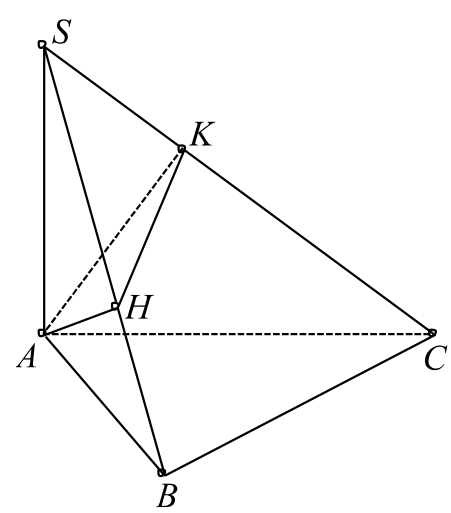
nên $\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}$

hay $\frac{SH}{SB}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{4}{5}.$

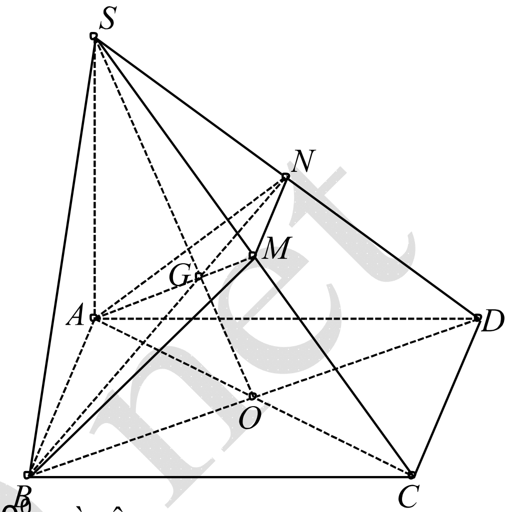
Tương tự ta có $\frac{SK}{SC}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2+CB^2}=\frac{2}{3}.$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{a^3}{3}.$

Vì thế $\frac{V_{S.AHK}}{V}=\frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SC}=\frac{8}{15}\Rightarrow V_{S.AHK}=\frac{8}{45}a^3.$



Bài 2



Vì G là trọng tâm tam giác SAC nên $AG \cap SC = M$ là trung điểm của $SC.$ Mặt khác ta có $AB // CD$ nên N là trung điểm của $SD.$ Do đó

$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABM}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANM}}{2V_{S.ADC}} = \frac{3}{8}$$

Góc hợp bởi AN và mặt phẳng đáy là $NAD = 30^0$, vì vậy

$$AD = SA.\cot 30^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$$

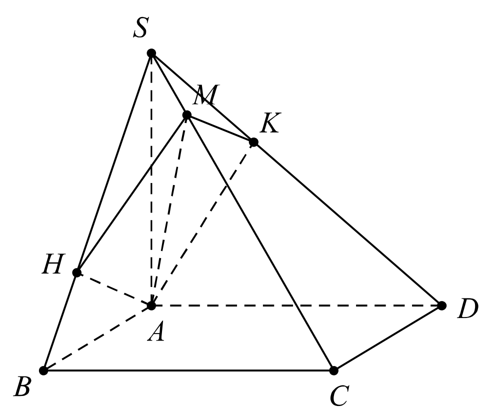
$$V_{S.ABMN} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3 \Rightarrow V_{MNABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMN} = \frac{5\sqrt{3}}{24}a^3.$$

Bài 3

1. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.AB.AD = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mặt khác $AH \perp SB$ nên suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh

được $AK \perp SC$

Từ đó, suy ra $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp AM$.

Ap dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}; \quad \frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3}{7};$$

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3}{8}$$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có được:

$$\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{9}{32} \Rightarrow V_{S.AHM} = \frac{9}{32} V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{32}$$

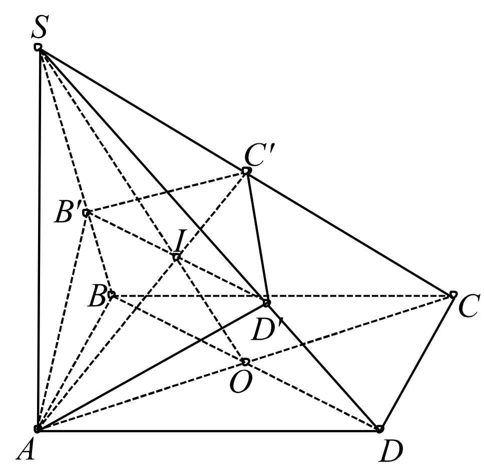
$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SK}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{9}{56} \Rightarrow V_{S.AKM} = \frac{9}{56} V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{56}$$

Vậy $V_{S.AHMK} = V_{S.AHM} + V_{S.AKM} = \dfrac{33a^3\sqrt{3}}{224}$.

Chú ý Ta có thể tính thể tích khối chóp $S.AHMK$ theo cách sau:

$V_{S.AHMK} = \dfrac{1}{3} SM.S_{AHMK}$.

2. Gọi O là giao của hai đường chéo của hình thoi và $I = SO \cap AC'$. Khi đó $B'D'$ qua I và song song với BD. Ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$ (vì I là trọng tâm tam giác SAC).



Suy ra $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$

và $\dfrac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SD'}{SD} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{S.AD'C'}}{2V_{S.ADC}} + \dfrac{V_{S.AD'C'}}{2V_{S.ADC}} = \dfrac{1}{3}$.

Mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{2}{3} SA.S_{ABD} = \dfrac{1}{3} a.a.a.\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a^3$

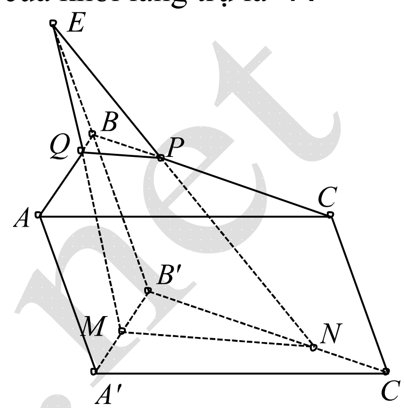
nên $V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{1}{3} V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{18} a^3$.

Bài 4

$NP \cap B'B = E, EM \cap AB = Q$

$$\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{1}{2}$$

Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1, phần còn lại có thể tích là V_2. Gọi thể tích của khối lăng trụ là V.



Ta có

$d(E,(A'B'C')) = 2.d(B,(A'B'C'))$,

$\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'M}{B'A'}.\frac{B'N}{B'C'} = \frac{1}{3}$

nên $V_{E.MB'N} = \frac{1}{3}.2.d(B,(A'B'C')).\frac{1}{3}S_{A'B'C'} = \frac{2}{9}V$.

$\frac{V_{E.QBP}}{V_{E.MB'N}} = \left(\frac{EB}{EB'}\right)^3 = \frac{1}{8}$

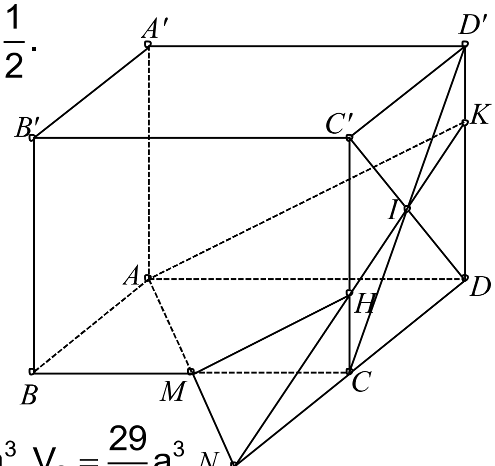
$\Rightarrow V_1 = V_{E.MB'N} - V_{E.QBP} = \frac{7}{8}.\frac{2}{9}V = \frac{7}{36}V$

$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{29}{36}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{29}$.

Bài 5

$AM \cap DC = N, NI$ cắt CC', DD' lần lượt tại H, K. Mặt phẳng (AMI) chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Khối đa diện chứa điểm D có thể tích là V_1, khối đa diện còn lại có thể tích là V_2. Thể tích của khối lập phương là $V = a^3$.

Ta có $\frac{HC}{KD} = \frac{NC}{ND} = \frac{NM}{NA} = \frac{NH}{NK} = \frac{MC}{AD} = \frac{1}{2}$.



Nên $V_{N.ADK} = \frac{1}{3}.ND.S_{ADK}$

$\Rightarrow V_{N.ADK} = \frac{2}{9}a^3$.

$\frac{V_{N.MCH}}{V_{N.ADK}} = \left(\frac{NC}{ND}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Do đó

$V_1 = V_{N.ADK} - V_{N.MCH} = \frac{7}{8}V_{N.ADK} = \frac{7}{36}a^3, V_2 = \frac{29}{36}a^3$.