CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A;\ y_A;\ z_A), B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ và mặt phẳng $(P): \ ax+by+cz+d=0.$ Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

2. $|MA-MB|$ lớn nhất với $d(A,\ (P)) \neq d(B,\ (P)).$

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm $A,\ B$ so với mặt phẳng (P).

- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)>0$ thì hai điểm $A,\ B$ cùng phía với mặt phẳng (P).

- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)<0$ thì hai điểm $A,\ B$ nằm khác phía với mặt phẳng (P).

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm $A,\ B$ ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Vì $A,\ B$ ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB.$

- Trường hợp 2: Hai điểm $A,\ B$ ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và $MA=MA'$ nên $MA+MB=MA'+MB \geq A'B.$

Vậy $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P).$

2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P) và

$MA = MA'$ nên $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$.

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi $M = A'B \cap (P)$.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

1. (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A \not\in \Delta$ đến (P) lớn nhất

2. (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất

3. (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

1. Giả sử đường thẳng $\Delta: \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ và $A(x_0; y_0; z_0)$

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

Trong đó $Aa + Bb + Cc = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{bB + cC}{a}$ $(a \neq 0)$ **(1)**

Khi đó $d(A,(P)) = \dfrac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **(2)**

Thay (1) vào (2) và đặt $t = \dfrac{B}{C}$, ta đươc $d(A,(P)) = \sqrt{f(t)}$

Trong đó $f(t) = \dfrac{mt^2 + nt + p}{m't^2 + n't + p'}$, khảo sát hàm $f(t)$ ta tìm được $\max f(t)$.

Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A, B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A, B.

2. và **3**. làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có:

$d(A,(P)) = AH \leq AK$, mà AK không đổi. Do đó $d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K , nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

2. Nếu $\Delta \perp (Q) \Rightarrow \left((P),(Q)\right) = 90^0$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

• Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH \perp (P),\ CK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là BCH.

Ta có $\sin BCH = \dfrac{BH}{BC} \geq \dfrac{BK}{BC}$.

Mà $\dfrac{BK}{BC}$ không đổi, nên BCH nhỏ nhất khi $H \equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_Q}\right]\right]$ là VTPT của (P).

3. Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH \perp (P),\ AK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là AMH. Ta có $\cos AMH = \dfrac{HM}{AM} \geq \dfrac{KM}{AM}$.

Mà $\dfrac{KM}{AM}$ không đổi, nên AMH lớn nhất khi $H \equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d',Δ). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$ là VTPT của (P).

Ví dụ 1. 8 Trong không gian với hệ toạ độ đề các vuông góc $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

Lời giải.

• Đường thẳng d có $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$ là VTCP.

Gọi H là hình chiếu của A lên $d\Rightarrow H(1+2t;t;2+2t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(2t-1;t-5;2t-1)$.

Do $AH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+t-5+2(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(3;1;4)$.

• Gọi H' là hình chiếu của A lên $mp(P)$.

Khi đó, ta có: $AH'\le AH\Rightarrow d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv H'\Leftrightarrow(P)\perp AH$

Suy ra $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ là VTPT của (P) và (P) đi qua H.

Vậy phương trình $(P):x-4y+z-3=0$.

Ví dụ 2.8 Trong không gian với hệ toạ độ đề các vuông góc $Oxyz$ cho bốn điểm $A\left(1;0;0\right)$, $B\left(1;1;0\right)$, $C\left(0;1;0\right)$, $D\left(0;0;m\right)$ với $m\neq 0$ là tham số.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD khi $m=2$;

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BD. Tìm các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OBH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;1;0)$, $\overrightarrow{CD}=(0;-1;m)$

1. Với $m=2$ ta có: $\overrightarrow{CD}=(0;-1;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;1;0)$

Do đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(2;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}=-2$

Vậy $d(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}=\dfrac{2}{2}=1$.

2. Đặt $x = OH \Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{2 - x^2}$

Suy ra $S_{\Delta OBH} = \frac{1}{2}x.\sqrt{2-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(2-x^2)} \le \frac{1}{4}(x^2 + 2 - x^2) = \frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow OH = 1 \Leftrightarrow d(O, BD) = 1$

Ta có: $\overrightarrow{BD} = (-1;-1;m)$, $\overrightarrow{OB} = (1;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}\right] = (-m;m;0)$

Do đó $d(O, BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2+m^2}} = 1 \Leftrightarrow 2m^2 = 2 + m^2$

$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

> **Ví dụ 3.8** Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho:
> **1**. M là trực tâm của tam giác ABC;
> **2**. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là lớn nhất;
> **3**. $OA = OB = OC$;
> **4**. $8OA = 12OB + 16 = 37OC$ và $x_A > 0, z_C < 0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

1. Ta có: $\overrightarrow{AM}(1-a;9;4), \overrightarrow{BC}(0;-b;c), \overrightarrow{BM}(1;9-b;4), \overrightarrow{CA}(a;0;-c)$.

Điểm M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\begin{cases} M \in (\alpha) \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1 \\ 9b=4c \\ a=4c \end{cases} \Rightarrow a=98; b=\frac{98}{9}; c=\frac{49}{2}.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0.$

2.

Cách 1: Ta có: $d(O,(\alpha))=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$

Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ với các số thực

$a,b,c\neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1$ (1).

Ap dụng bđt Bunhiacopski ta có:

$$\left(1.\frac{1}{a}+9.\frac{1}{b}+4.\frac{1}{c}\right)^2\leq(1^2+9^2+4^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Nên suy ra $T\geq\frac{1}{98}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 1:\frac{1}{a}=9:\frac{1}{b}=4:\frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=9b=4c=98.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0.$

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α).

Vì mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định M nên

$d(O,(\alpha))=OH\leq OM=\sqrt{98}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H\equiv M,$ khi đó (α) là mặt phẳng đi qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}(1;9;4)$ nên phương trình (α) là

$$1.(x-1)+9(y-9)+4.(z-4)=0\Leftrightarrow x+9y+4z-98=0.$$

3. Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra bốn trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $a=b=c.$