

Chuyên đề nâng cao

RÚT GỌN BIỂU THỨC

BẢNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ LIÊN TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Thông thường, muốn rút gọn một biểu thức hữu tỉ ta dựa vào quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia phân thức. Nhưng có những biểu thức hữu tỉ ta không thể vận dụng trực tiếp quy tắc các phép toán về phân thức được vì nhiều lí do khác nhau.

Chẳng hạn, không thể quy đồng mẫu thức của hàng trăm phân thức có mẫu thức khác nhau để cộng; trừ chúng. Không thể tìm tích của hàng chục phân thức bằng cách nhân trực tiếp tử với tử, mẫu với mẫu mà không tìm ra quy luật để rút gọn tích.

Gặp những trường hợp như vậy, người ta thường tách mỗi hạng tử thành tổng hay hiệu của các phân thức hoặc tách mỗi nhân tử thành tích của hai hay nhiều phân thức để sau đó khử liên tiếp, hoặc nhóm lại thành từng nhóm có thể tính ra kết quả dễ dàng.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 22. Tính tổng

$$S = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}.$$

Giải. Trước hết ta chứng minh công thức

$$\frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{(x+k+1)-(x+k)}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}.$$

Cho k lần lượt lấy các giá trị từ 0 đến 99 ta được

$$S = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x+99} - \frac{1}{x+100}\right).$$

Vì số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ của nhóm sau nên sau khi *khử liên tiếp* ta

$$\text{được : } S = \frac{11}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{x+100-x}{x(x+100)} = \frac{100}{x(x+100)}.$$

Ví dụ 23. Tính tổng

$$S = \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Giải. Ta có: } \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} &= \frac{x^2+xy-xy-yz}{(x+y)(x+z)} \\ &= \frac{x(x+y)-y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)} = \frac{y}{y+x} - \frac{z}{y+z}; \quad \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{z}{z+y} - \frac{x}{z+x}.$$

$$\text{Do đó } S = \left(\frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{y}{y+x} - \frac{z}{y+z}\right) + \left(\frac{z}{z+y} - \frac{x}{z+x}\right) = 0.$$

Ví dụ 24. Tính tích $P = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{z^2+2n}\right)$

Giải. Dạng tổng quát của mỗi thừa số là

$$1 + \frac{1}{k^2+2k} = \frac{k^2+2k+1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Cho k các giá trị 1, 2, 3, ..., n ta được: