Chuyên đề nâng cao 2

TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

Các bài toán về chia hết và chia còn dư trên tập hợp số nguyên là loại toán cơ bản, trọng tâm của phần số học. Các đề thi học sinh giỏi, thi tuyển vào các lớp chuyên, lớp chọn không thể thiếu loại toán này. Chúng ta sẽ nhắc lại định nghĩa, tính chất và hệ thống các phương pháp chứng minh chia hết trên tập hợp các số nguyên.

I. ĐỊNH NGHĨA

- Cho a, b $\in$ Z và b $\neq$ 0. Nếu có số nguyên q sao cho a = bq thì ta nói a chia hết cho b, kí hiệu a ⋮ b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.
- Người ta đã chứng minh được rằng : Với hai số nguyên tuỳ ý a và b (b $\neq$ 0) tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q và r sao cho a = bq + r trong đó 0 $\leq$ r$\leq$ |b|.

Số r gọi là số dư trong phép chia a cho b. Nếu r = 0 thì a⋮ b.

Một số tính chất về chia hết suy từ định nghĩa Với a, b, c, k $\in$ Z.

1. Nếu a $\neq$ 0 thì a ⋮ a.

2. Nếu a ⋮ b, b ⋮ c thì a ⋮ c.

3. Số 0 chia hết cho mọi số nguyên khác 0.

4. Nếu $a \,\vdots\, b$ và $b \,\vdots\, a$ thì $a = \pm b$.

5. Nếu $a \,\vdots\, b$ thì $ka \,\vdots\, b$.

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ TÍNH CHẤT CHIA HẾT

1. Nếu $a \,\vdots\, m$, $b \,\vdots\, m$ thì $a \pm b \,\vdots\, m$.

2. Nếu $a \,\vdots\, m$, $b \not\vdots\, m$ thì $a \pm b \not\vdots\, m$.

3. Nếu $a \,\vdots\, m$, $b \,\vdots\, n$ thì $ab \,\vdots\, mn$.

   Đặc biệt: nếu $a \,\vdots\, b$ thì $a^n \,\vdots\, b^n$ $(n \in N)$.

4. Nếu $a \,\vdots\, m$, $a \,\vdots\, n$ mà $(m, n) = 1$ thì $a \,\vdots\, mn$

   Nếu $a \,\vdots\, m$, $a \,\vdots\, n$ mà $(m, n) \neq 1$ thì $a \,\vdots\,$ BCNN(m, n).

5. Nếu $ab : m$ mà $(a, m) = 1$, thì $b : m$.

Đặc biệt: Nếu $ab \,\vdots\, p$ thì $a \,\vdots\, p$ hoặc $b \,\vdots\, p$ (với p là số nguyên tố).

Nếu $a^n \,\vdots\, p$ thì $a \,\vdots\, p$ (với p là số nguyên tố).

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN

Phương pháp 1 : Phân tích biểu thức bị chia thành tích

Để chứng minh biểu thức A(n) với n là số nguyên chia hết cho một số nguyên $a \neq 0$, ta phân tích A(n) thành nhân tử và chứng minh ít nhất có một nhân tử chia hết cho a.

Lưu ý : Tích của hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 ; Tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.

Tổng quát: Tích của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n.

Ví dụ 38. Chứng minh rằng :

a) Hiệu của một số có ba chữ số với tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

b) Hiệu của một số có ba chữ số với số đó viết theo thứ tự ngược lại thì chia hết cho 99.

Giải

a) Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$.

Ta có $\overline{abc} - (a + b + c) = 100a + 10b + c - (a + b + c)$

$$= 99a + 9b = 9.(11a + b) \,\vdots\, 9$$

b) Gọi số có ba chữ số là abc .

Ta có $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$$= 99a - 99c = 99.(a - c) \,\vdots\, 99.$$

Ví dụ 39. Chứng minh rằng :

a) Bình phương của một số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 2.

b) Lập phương của một số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6.

Giải. Gọi số nguyên là n

a) Ta có $n^2 - n = n(n-1) \vdots 2$ (vì là tích của hai số nguyên liên tiếp).

b) Ta có $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$.

Tích (n - 1).n.(n + 1) là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, cho 3. Mặt khác (2, 3) = 1 nên tích trên chia hết cho 2.3 tức là chia hết cho 6.

Ví dụ 40. Cho $n \in N$, Chứng minh rằng 8n - 1 và 8n + 1 không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Giải. Xét tích $(8^n - 1).8^n.(8^n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3.

Dễ thấy $8^n - 1 ; 8^n ; 8^n + 1 > 3$ (vì $n \in N^*$).

Ta có $(8^n, 3) = 1$ nên $8^n - 1 \vdots 3$ hoặc $8^n + 1 \vdots 3$.

Do đó $8^n - 1$ hoặc $8^n + 1$ là hợp số.

Suy ra $8^n - 1$ và $8^n + 1$ không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Phương pháp 2 : Biểu diễn biểu thức bị chia dưới dạng tổng

Để chứng minh biểu thức A(n) $\vdots$ a (n, a $\in$ Z) ta biểu diễn A(n) dưới dạng tổng của nhiều hạng tử rồi chứng minh mỗi hạng tử đều chia hết cho a.

Ví dụ 41. Chứng minh rằng với $n \in z$ thì $A = n^5 - n \vdots 30$.

Giải

Ta có $n^5 - n = n\left(n^4 - 1\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right)$

$$= n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left[\left(n^2 - 4\right) + 5\right]$$

$$= n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n-2\right)\left(n+2\right) + 5n\left(n-1\right)\left(n+1\right).$$

Hạng tử thứ nhất là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, cho 3, cho 5. Mặt khác 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên hạng tử này chia hết cho 2.3.5 tức là chia hết cho 30.

Hạng tử thứ hai 5n(n - 1)(n + 1) có tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, cho 3. Ngoài ra còn chia hết cho 5 (vì có chứa thừa số 5) nên hạng tử thứ hai chia hết cho 30. Từ đó suy ra A ⋮ 30.

Lưu ý: Qua ví dụ 39 và ví dụ 41 ta thấy :

$$n^2 - 2 \,\vdots\, 2;\; n^3 - n \,\vdots\, 3;\; n^5 - n \,\vdots\, 5$$

Tổng quát: Nếu p là số nguyên tố thì $a^p - a$ chia hết cho p với mọi số nguyên a. Đây là định lí nhỏ Fec-ma(*).

Ví dụ 42. Cho a, b $\in$ z, chứng minh rằng :

a) $A = a^3b - ab^3 \,\vdots\, 6$; b) $B = a^5b - ab^5 \,\vdots\, 30$.

Giải

a) Ta có $a^3b - ab^3 = a^3b - ab - ab^3 + ab$

$$= b\left(a^3 - a\right) - a\left(b^3 - b\right)$$