

Chuyên đề nâng cao 1

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Chúng ta đã biết ba phương pháp để phân tích một đa thức thành nhân tử là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử và phối hợp ba phương pháp đó. Tuy nhiên có những đa thức mặc dù rất đơn giản, nếu chỉ biết dùng ba phương pháp đó thôi thì không thể phân tích thành nhân tử được.

Chẳng hạn đa thức $x^4 + 4y^4$. Nếu là $x^4 - 4y^4$ thì dùng phương pháp hằng đẳng thức phân tích được dễ dàng nhưng ở đây giữa x^4 và $4y^4$ là dấu +. Một đa thức khác như $x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2$ cũng vậy. Phương pháp đặt nhân tử chung không dùng được vì cả ba hạng tử không có nhân tử chung. Phương pháp dùng hằng đẳng thức thì không thích hợp vì không thuộc một dạng hằng đẳng thức nào. Còn phương pháp nhóm các hạng tử cũng không dùng được, vì muốn dùng phương pháp này thì đa thức phải có từ bốn hạng tử trở lên.

Do đó trong chuyên đề này chúng ta sẽ xét thêm một số phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.

Ví dụ 28. Phân tích đa thức A thành nhân tử

$$A = 4x^2 - 4x - 15$$

Giải

- Cách 1 :

Tách hạng tử cuối thành hai hạng tử rồi nhóm lại và dùng phương pháp hằng đẳng thức để phân tích :

$$\begin{aligned}A &= 4x^2 - 4x - 15 \\&= (4x^2 - 4x + 1) - 16 = (2x - 1)^2 - 4^2 \\&= (2x - 1 - 4)(2x - 1 + 4) = (2x - 5)(2x + 3).\end{aligned}$$

- Cách 2 :

Tách hạng tử $-4x$ thành hai hạng tử rồi nhóm lại và dùng phương pháp đặt nhân tử chung để phân tích.

$$\begin{aligned}A &= 4x^2 - 4x - 15 = 4x^2 - 10x + 6x - 15 \\&= 2x(2x - 5) + 3(2x - 5) = (2x - 5)(2x + 3).\end{aligned}$$

Cơ sở của phương pháp tách các hạng tử là tách một hạng tử thành nhiều hạng tử để có thể đặt nhân tử chung theo từng nhóm hoặc dùng hằng đẳng thức :

Nhận xét : Trong cách tách thứ hai ta đã tách $-4x$ thành $-10x + 6x$ và được

$A = 4x^2 - 10x + 6x - 15$. Ta nhận thấy các hệ số của chúng tỉ lệ với nhau :

$$\frac{4}{-10} = \frac{6}{-15} \text{ hay } 4 \cdot (-15) = (-10) \cdot 6$$

Nếu tách hạng tử bậc nhất thành hai hạng tử thoả mãn điều kiện trên, thì sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm, kết quả lại xuất hiện nhân tử chung và ta tiếp tục phân tích đến kết quả cuối cùng.

Tổng quát : Đối với tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ ta có thể tách hạng tử bậc nhất bx thành hai hạng tử b_1x và b_2x sao cho :

$$b_1 + b_2 = b$$

$$b_1 \cdot b_2 = ac.$$

Khi đó đa thức $ax^2 + bx + c$ có thể phân tích được thành nhân tử bằng cách đặt nhân tử chung theo từng nhóm.

Điều kiện để đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành tích của hai nhị thức bậc nhất là biểu thức $b^2 - 4ac$ là một số chính phương.

Trong ví dụ 28 thì $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15) = 256 = 16^2$.

Ví dụ 29. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 - 13x + 36$;

b) $x^2 - 5x - 14$;

c) $3x^2 - 5xy - 2y^2$.

Giải

$$\text{a) } x^2 - 13x + 36 = x^2 - 4x - 9x + 36 = x(x - 4) - 9(x - 4) = (x - 4)(x - 9).$$

$$\text{b) } x^2 - 5x - 14 = x^2 + 2x - 7x - 14 - x(x + 2) - 7(x + 2) = (x + 2)(x - 7).$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x^2 - 5xy - 2y^2 &= 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2 \\ &= 3x(x - 2y) + y(x - 2y) = (x - 2y)(3x + y). \end{aligned}$$

Trên đây ta đã xét đối với các tam thức bậc hai. Còn đối với đa thức có bậc lớn hơn hai thì tùy theo đặc điểm của các hệ số mà lựa chọn cách tách cho phù hợp.

Ví dụ 30. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$A = x^3 - 4x^2 + 3$$

Giải : Ta tách hệ số 3 thành $-1 + 4$:

$$\begin{aligned} A &= x^3 - 1 - 4x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4(x + 1)(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x - 4) = (x - 1)(x^2 - 3x - 3). \end{aligned}$$

Cách khác : Nhằm nghiệm rồi dùng hệ quả của định lí Bê - du : Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của đa thức A nên theo hệ quả của định lí Bê-du ta có

$$x^3 - 4x^2 + 3 = (x - 1) \cdot q(x)$$

Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử $x - 1$. Vì thế ta sẽ tách như sau :

$$\begin{aligned} B &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 2x + 2 \\ &= x^3(x + 1) + x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^3 + x^2 + 2x + 2) \\ &= (x + 1)[x^2(x + 1) + 2(x + 1)] = (x + 1)(x + 1)(x^2 + 2) = (x + 1)^2 (x + 2). \end{aligned}$$