

CHUYÊN ĐỀ 6 – BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Khái niệm biểu thức đại số

Trong toán học, vật lí,... ta thường gặp các biểu thức mà trong đó ngoài các số, các kí hiệu phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, còn có cả các chữ (đại diện cho các số). Người ta gọi những biểu thức như vậy là biểu thức đại số.

Ví dụ: Biểu thức đại số biểu thị trung bình cộng của hai số a và b là: $\frac{a+b}{2}$

Biểu thức đại số biểu thị lập phương của tổng hai số a và b là: $(a+b)^3$

2. Giá trị của một biểu thức đại số

Tính giá trị của biểu thức đại số:

- Bước 1: Thay chữ bởi giá trị số đã cho (chú ý các trường hợp phải đặt số trong dấu ngoặc).
- Bước 2: Thực hiện các phép tính (chú ý đến thứ tự thực hiện các phép tính: thực hiện phép lũy thừa, rồi đến phép nhân, chia sau đó là phép cộng trừ).

Ví dụ: Tính giá trị của biểu thức $x^2y^3 + xy$ tại $x=1$ và $y=\frac{1}{2}$

Giải

Thay $x=1$ và $y=\frac{1}{2}$ vào biểu thức $x^2y^3 + xy$, ta có:

$$1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

3. Đơn thức

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Ví dụ: 1 ; $-\frac{3}{4}x^2y(-7x)$; $2xy$;...

4. Đơn thức thu gọn

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.

Bậc của đơn thức:

- Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.
- Số thực khác 0 là đơn thức bậc không
- Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.

Nhân hai đơn thức: Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Ví dụ: Thu gọn đơn thức $-\frac{1}{5}x^3y^2 \cdot \frac{5}{4}xy^3 = \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4}\right)(x^3x)(y^2y^3) = -\frac{1}{4}x^4y^5$

- Hệ số: $-\frac{1}{4}$
- Phần biến: x^4y^5
- Bậc của đơn thức: 9

5. Đơn thức đồng dạng

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến. Các số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

Ví dụ: Các đơn thức $\frac{5}{3}x^2y$; $-\frac{1}{2}x^2y$; x^2y ; $5x^2y$ là các đơn thức đồng dạng.

6. Cộng, trừ đơn thức đồng dạng

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Ví dụ: Tính $25xy^2 + 55xy^2 + 75xy^2 - 35xy^2$

Giải

$$\begin{aligned} & 25xy^2 + 55xy^2 + 75xy^2 - 35xy^2 \\ &= (25 + 55 + 75 - 35)xy^2 \\ &= 120xy^2 \end{aligned}$$

7. Đa thức

Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó. Mỗi đơn thức được coi là đa thức.

Ví dụ: $x^3 - 3$; $xyz - ax^2 + by$; $a(3xy + 7x)$ là các đơn thức.

8. Thu gọn đa thức

Đưa đa thức về dạng thu gọn (không còn hai hạng tử nào đồng dạng).

- Bước 1: Nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau;
- Bước 2: Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng trong từng nhóm

Ví dụ: Thu gọn đa thức $P = \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y$

Giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{3}x^2y\right) + \left(xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right) + (-xy - 5xy) \\ &= \frac{3}{2}xy^2 - 6xy \end{aligned}$$

9. Bậc của đa thức

Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Số 0 cũng được gọi là đa thức không và nó không có bậc.

Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết ta phải thu gọn đa thức đó.

Ví dụ: Đa thức $x^6 - 2y^5 + x^4y^5 + 1$ có bậc là 9.

Đa thức $\frac{3}{2}xy^2 - 6xy$ có bậc là 3.

10. Cộng, trừ đa thức

Để cộng (hay trừ) hai đơn thức, ta làm như sau:

- Bước 1: Viết hai đa thức trong dấu ngoặc;
- Bước 2: Thực hiện bỏ dấu ngoặc (theo quy tắc dấu ngoặc);
- Bước 3: Nhóm các hạng tử đồng dạng
- Bước 4: Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.

Ví dụ: Tính $(2,4x^2 + 1,7y^2 + 2xy) - (0,4x^2 - 1,3y^2 + xy)$

Giải

$$\begin{aligned} & (2,4x^2 + 1,7y^2 + 2xy) - (0,4x^2 - 1,3y^2 + xy) \\ &= 2,4x^2 + 1,7y^2 + 2xy - 0,4x^2 + 1,3y^2 - xy \\ &= (2,4x^2 - 0,4x^2) + (1,7y^2 + 1,3y^2) + (2xy - xy) \\ &= 2x^2 + 3y^2 + xy \end{aligned}$$

11. Đa thức một biến

Đa thức một biến:

- Là tổng của những đơn thức của cùng một biến
- Mỗi số được coi là một đa thức một biến
- Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

Ví dụ: Đa thức $3x^5 + x^3 - 3x^2 + 1$ là đa thức một biến (biến x); bậc của đa thức là: 5

12. Sắp xếp đa thức:

Để thuận lợi cho việc tính toán đối với các đa thức một biến, người ta thường sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

- Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.
- Những chữ đại diện cho các số xác định cho trước được gọi là hằng số.

Ví dụ: Cho đa thức $P(x) = 2 + 5x^2 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$. Thu gọn và sắp xếp đa thức $P(x)$

Giải:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 + 5x^2 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - x^3 + 6x^5 \\ &= 6x^5 + (-3x^3 - x^3) + (5x^2 + 4x^2) - 2x + 2 \\ &= 6x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

13. Hệ số

Hệ số của lũy thừa 0 của biến gọi là hệ số tự do; hệ số của lũy thừa cao nhất của biến gọi là hệ số cao nhất.

Ví dụ: Các hệ số của đa thức $6x^5 - x^3 + 6x^2 - 2x + 2$ là: 6; - 1; 6; - 2; 2

Hệ số tự do là: 2

Hệ số cao nhất là: 6

14. Cộng, trừ đa thức một biến

- Cách 1: Cộng, trừ đa thức theo “hàng ngang”

- Cách 2: Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến. rồi đặt phép tính theo cột dọc tương ứng như cộng, trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

Ví dụ: Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1$

$$Q(x) = 6 - 2x + 3x^3 + x^4 - 3x^5$$

Tính $P(x) - Q(x)$?

Giải

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1) - (6 - 2x + 3x^3 + x^4 - 3x^5) \\ &= x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1 - 6 + 2x - 3x^3 - x^4 + 3x^5 \\ &= 4x^5 - 3x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 5. \end{aligned}$$

15. Nghiệm của đa thức một biến

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

Ví dụ: Tìm nghiệm của đa thức $P(y) = 2y + 6$

Giải

$$\text{Từ } 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = -6 \Rightarrow y = -\frac{6}{2} = -3$$

Vậy nghiệm của đa thức $P(y)$ là -3 .