Chuyên đề 2

PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

2. Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

3. Phép cộng các phân thức có các tính chất giao hoán, kết hợp

4. Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + (-\frac{C}{D}).$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 7. Thực hiện phép tính $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2-3}{x^3-x}$.

Giải. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2-3}{x^3-x}$.

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{x^2-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x-(x-1)+x^2-3}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

Ví dụ 8. Cho biểu thức

a) Rút gọn P;

b) Tìm x $\in$ Z để

$$P = \frac{2}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{x^2+6x+2}{1-x^3}.$$

$$= \frac{2(x^2+x+1)+(2x-1)(x-1)+x^2+6x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2x+2+2x^2-2x-x+1+x^2+6x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{5x^2+5x+5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5}{x-1}.$$

b) P có giá trị nguyên <=> $\frac{5}{x-1}$ có giá trị nguyên

<=> (x - 1) $\in$ Ư(5) = {± 1 ; ± 5}

x - 1	1	-1	5	-5
x	2	0	6	-4

Vậy khi x $\in$ {-4 ; 0 ; 2 ; 6} thì P có giá trị nguyên.

Ví dụ 9. Cho n $\in$ Z. Chứng minh rằng biểu thức

$A = \frac{125n^3}{6} + \frac{25n^2}{2} + \frac{5n}{3}$ có giá trị nguyên.

Giải.

Ta có $A = \frac{125n^3+75n^2+10n}{6} = \frac{5n(25n^2+15n+2)}{6}$

$$= \frac{5n(5n+1)(5n+2)}{6}.$$

Ta thấy tích 5n(5n + 1)(5n + 2) là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6. Do đó $A = \frac{6.k}{6} = k$ $(k \in Z)$.

Ví dụ 10. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$;

b) $B = \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{zx}{(y-z)(y-x)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)}$.

Giải

a) $A = \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$

$= \frac{(z-y)+(x-z)+(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0.$

b) $B = \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{zx}{(y-z)(y-x)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)}$

$= \frac{yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$= \frac{yz(z-y) + zx(x-z) - xy[(z-y) + (x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$= \frac{y(z-y)(z-x) + x(x-z)(z-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)(z-x)(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1.$

Lưu ý: Nên ghi hớ kết quả các bài toán ở ví dụ này để áp dụng vào giải một số bài toán khác được nhanh chóng.

Ví dụ 11. Cho a, b, c và x, y, z là các số khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = 0$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = k$. Tính tổng $S = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$..