

Chuyên đề 1

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$ trong đó A, B là những đa thức và B là đa thức khác 0.

2. Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $A.D = B.C$.

3. Tính chất cơ bản của phân thức :

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad (M \text{ là một đa thức khác đa thức } 0).$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad (N \text{ là một nhân tử chung}).$$

4. Quy tắc đổi dấu : $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

5. Quy tắc rút gọn phân thức :

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử ;
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

6. Quy tắc quy đồng mẫu thức :

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung ;

- Tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức ;
- Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hai phân thức sau có bằng nhau không ? Vì sao ?

$$\frac{a+3}{a-4} \text{ và } \frac{a+6}{a-8}.$$

Giải. Ta có $(a+3)(a-8) = a^2 - 5a - 24$; $(a-4)(a+6) = a^2 + 2a - 24$.

Vì $a^2 - 5a - 24 \neq a^2 + 2a - 24$ nên hai phân thức đã cho không bằng nhau.

Ví dụ 2. Cho $ad = bc$ trong đó $b \neq 0$, $3b \neq d$ Chứng minh rằng : $\frac{3a-c}{3b-d} = \frac{a}{b}$.

Giải: Ta có $(3a - c)b = 3ab - bc = 3ab - ad$. (1)

$$(3b - d)a = 3ab - ad. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(3a - c)b = (3b - d)a$.

Do đó $\frac{3a-c}{3b-d} = \frac{a}{b}$.

Ví dụ 3. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$.

Giải. Vì $a > b > 0$ nên $a + b > 0$; $a - b > 0$.

Vận dụng tính chất cơ bản của phân thức ta có

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} < \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}.$$

(vì $0 < a^2 - b^2 < a^2 + b^2$).

Ví dụ 4. Cho phân thức $P = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2}$

Rút gọn rồi chứng tỏ rằng phân thức p luôn có giá trị không âm với mọi giá trị của x.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^3(x-1) - (x-1)}{x^2(x^2+x+1) + 2(x^2+x+1)} = \frac{(x-1) - (x^3-1)}{(x^2+x+1) + 2(x^2+2)} \\ &= \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1) + 2(x^2+2)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} \geq 0, \text{ với mọi } x. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho phân thức $Q = \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^8 + x + 1}$.

Chứng minh rằng phân thức Q là phân thức chưa tối giản.

Giải