BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Quy tắc tìm cực trị của hàm số.

Quy tắc 1:

- Tìm TXĐ của hàm số.

- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

- Lập bảng biến thiên.

- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

- Tìm TXĐ của hàm số.

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i $(i=1,2,3,...)$ là các nghiệm của nó.

- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

- Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1) Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba.

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

$y'=3ax^2+2bx+c$

+) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2-3ac>0$. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là :

$$y=\left(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}.$$

+) Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3+bx^2+cx+d-\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{b}{9a}\right)\xrightarrow{x=i}Ai+B\Rightarrow y=Ax+B$$

Hoặc sử dụng công thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$.

Ví dụ 1: Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - x + 2$

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3 + 3x^2 - x + 2 - \left(3x^2 + 6x - 1\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{x=i} \frac{7}{3} - \frac{8}{3}i \Rightarrow y = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$$

Ví dụ 2: Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số:

$y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3 - 3x^2 + m^2x + m - \left(3x^2 - 6x + m^2\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{x=i,\, m=A=1000} \frac{1003000}{3} + \frac{1999994}{3}i$$

Ta có: $\frac{1003000}{3} + \frac{1999994}{3}i = \frac{1000000 + 3000}{3} + \frac{2000000 - 6}{3}i = \frac{m^2 + 3m}{3} + \frac{2m^2 - 6}{3}x$

Vậy đường thẳng cần tìm: $y = \frac{2m^2 - 6}{3}x + \frac{m^2 + 3m}{3}$

+) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}}$ với $e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$

2) Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương .

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

$y' = 4ax^3 + 2bx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{array}\right.$$

(C) có ba điểm cực trị $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Các kết quả cần ghi nhớ:

+) ΔABC vuông cân

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 1 = 0$$

+) ΔABC đều

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 3 = 0$$

+) $\widehat{BAC} = \alpha$, ta có: $\cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{8a}{b^3}$

+) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

+) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \dfrac{b^3 - 8a}{8|a|b}$

+) Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là

$$r = \frac{\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}}{\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b}{2a}} + \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}} = \frac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$$

+)Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$$

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU (30 câu)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và đạt cực đại $x = 0$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta được hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai cực trị.

B. Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$y(0) = 3; \quad y(1) = y(-1) = 2$ nên hàm số có hai cực trị.

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y = -2x + 1$.

B. $y = 2x - 1$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = -x + 2$.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(1;-1), B(-1;3)$ $\Rightarrow$ Phương trình $AB: y = -2x + 1$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $x^3-3x+1-\left(3x^2-3\right)\left(\frac{x}{3}\right)$

Bước 3 : Cacl $x=i$

Kết quả : $1-2i \Rightarrow$ phương trình AB: $y=1-2x$

Câu 6. Gọi M,n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$. Khi đó giá trị

của biểu thức M^2-2n bằng:

A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Hướng dẫn giải:

$$y'=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CD}=-3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $y_{CT}=1$

$\Rightarrow M^2-2n=7$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1:

$$\left.\frac{d\left(\frac{x^2+3x+3}{x+2}\right)}{dx}\right|_{x=1000}.\left(100+2\right)^2 \to 1004003=1000^2+4000+3=x^2+4x+3$$

$$y'=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

Bước 2: Giải phương trình bậc hai : $x^2+4x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \to A \\ x=-3 \to B \end{array}\right.$

Bước 3: Nhập vào máy tính $\frac{x^2+3x+3}{x+2}$

Cacl $x=A \to C$

Cacl $x=B \to D$

Bước 4: Tính $C^2-2D=7$

Câu 7. Cho hàm số $y=x^3+17x^2-24x+8$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_{CD}=-12.$ B. $x_{CD}=\frac{2}{3}.$ C. $x_{CD}=-3.$ D. $x_{CD}=1.$

Hướng dẫn giải:

$$y'=3x^2+34x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-12 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-12$.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=1.$ B. $y_{CD}=-2.$ C. $y_{CD}=-1.$ D. $y_{CD}=2.$

Hướng dẫn giải:

$$y'=12x^3-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$.

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x=\frac{3}{2}$?

A. $y=\sqrt{-x^2+3x-2}.$ B. $y=\frac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3x.$

C. $y=\sqrt{4x^2-12x-8}.$ D. $y=\frac{x-1}{x+2}.$

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$ có $y'=\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$ và y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi x chạy qua $\frac{3}{2}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{3}{2}$.

Dùng casio kiểm tra: $\begin{cases} y'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \\ y''\left(\frac{3}{2}\right)<0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại $\frac{3}{2}$.

Câu 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7.$

B. $y=-17x^3+2x^2+x+5.$

C. $y=\frac{x-2}{x+1}.$

D. $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}.$

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có

phương trình là:

A. $y=6x+13.$

B. $y=3x+13.$

C. $5x-2y+13=0.$

D. $2x+4y-1=0.$

Hướng dẫn giải:

$y'=\frac{3x^2+18x+20}{(x+3)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-9+\sqrt{21}}{3} \\ x=\frac{-9-\sqrt{21}}{3} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=6x+13$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức, ta có: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y = \frac{\left(3x^2 + 13x + 19\right)'}{\left(x+3\right)'} \Leftrightarrow y = 6x + 13$$

Câu 12. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại $x = 2$.

D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1(l)\ .$$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^7 - x^5$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có đúng hai điểm cực trị.

B. Hàm số có đúng 3 điểm cực trị .

C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

D. Hàm số có đúng 4 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 7x^6 - 5x^4 = x^4(7x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{7}} \end{array}\right. .$$

y' chỉ đổi dấu khi x chạy qua $\pm\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2 B. 3 C.4 D. 5

Hướng dẫn giải:

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số không có điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

TXĐ $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)^{-\frac{2}{3}}(2x - 2)$$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó giá trị của

biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng:

A. 8. B.-8. C.10. D. -10.

Hướng dẫn giải:

$D = \mathbb{R}$

$y' = -3x^2 + 6x + 6$

Phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

$$S = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 8$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bước 1: Giải phương trình bậc hai : $-3x^2 + 6x + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3} \to A \\ x = 1 - \sqrt{3} \to B \end{array}\right.$

Bước 2: Tính $A^2 + B^2 = 8$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 .

B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .

C. Nếu đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

D. Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại x_0 .

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a,b]$ và đạt cực đại, cực tiểu lần lượt tại $x_1, x_2 \in [a,b]$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$ hoặc $f''(x_0) > 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ luôn có cực trị.

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

C. Hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm bậc ba.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M , giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.

Câu 21. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 2.　　B. 1 hoặc 2.

C. 0 hoặc 1 hoặc 2.　　D. 0 hoặc 1.

Hướng dẫn giải:

Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$\Delta' = b^2 - 3ac$

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.