

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

NB-TH: 26 câu - VD: 21 câu - VDC: 8 câu

A. LÝ THUYẾT

■ Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

✚ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

✚ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

■ Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

✚ Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

✚ Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

■ Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

✚ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

✚ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

✚ Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

■ Chú ý.

✚ Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

✚ Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

B. BÀI TẬP

1.1.1 Chiều biến thiên của hàm số

Câu 1. [NB-TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K, f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số tăng trên K .

B. Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số tăng trên K .

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hướng dẫn giải

Xem phần lý thuyết.

Câu 2. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

+) $y' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$

+) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Câu 3. [NB-TH] Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .
- B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 4. [NB-TH] Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 10$ và các khoảng sau:

(I) $(-\infty; -\sqrt{2})$; (II) $(-\sqrt{2}; 0)$; (III) $(0; \sqrt{2})$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

- A. (I) và (III).
- B. (I) và (II).
- C. (II) và (III).
- D. Chỉ (I).

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$+) y' = -4x^3 + 8x = 4x(2 - x^2). \text{ Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

+) Trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 5. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$+) \text{ Ta có } y' = -\frac{10}{(-4+2x)^2} < 0, \forall x \in D.$$

Câu 6. [NB-TH] Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên \mathbb{R} ?

A. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$.

B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 7. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$. Hỏi hàm số nghịch trên các khoảng nào?

A. $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.

B. $(-4; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$+) y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}.$$

+) Giải $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

y' không xác định khi $x = -1$

+) BBT

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	1	$+\infty$

+) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$

Câu 8. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(2; 3)$ B. $(1; 6)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(5; +\infty)$

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

+) lập bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên $(1; 5)$

Câu 9. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. \mathbb{R} . B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 = 3x^2(x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 10. [NB-TH] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

Câu 11. [NB-TH] Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) Do $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$ nên hàm số **không** đồng biến trên \mathbb{R} .

Câu 12. [NB-TH] Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2); (2; 3)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải

+) ĐK: $3x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ suy ra $D = (-\infty; 3]$

+) $y' = \frac{6x - 3x^2}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}$

Giải $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$y' \text{ không xác định khi } \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

+) BBT

x	$-\infty$	0	2	3
y'		-	+ 0	-
y	$+\infty$			2
		0		0

Hàm số nghịch biến $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$

Hàm số đồng biến $(0; 2)$

Câu 13. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0; \pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$. B. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$.
- C. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$. D. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$+) y' = \frac{1}{2} + \sin 2x.$$

$$\text{Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên có 2 giá trị $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

+) BBT

x	0	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π			
y'		+	0	-	0	+	
y							

Hàm số đồng biến $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$

Câu 14. [NB-TH] Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 1 - \sin 2x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+) Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 15. [NB-TH] Cho các hàm số sau:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4; y = \frac{x-1}{x+1}; y = \sqrt{x^2 + 4}; y = x^3 + 4x - \sin x \text{ và } y = x^4 + x^2 + 2$$

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$+) y' = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y' = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \neq -1$$

$$y' = \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$$

$$y' = 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 16. [NB-TH] Hỏi hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số ?

$$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 (I)$$

$$y = \sin x - 2x (II)$$

$$y = -\sqrt{x^3 + 2} (III)$$

$$y = \frac{x-2}{1-x} (IV)$$

A. (I), (III).

B. (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV).

D. (II), (III).

Hướng dẫn giải

$$+) y' = (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$+) y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$+) y' = -\left(\sqrt{x^3 + 2} \right)' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}} \leq 0 \quad \forall x \in (-\sqrt[3]{2}; +\infty);$$

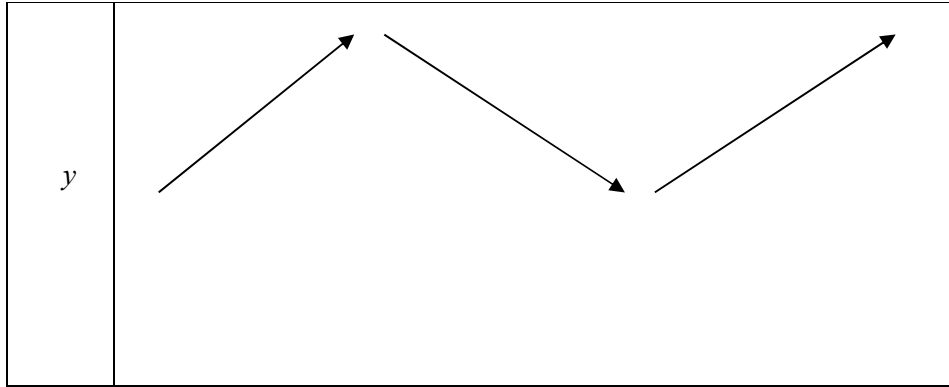
$$+) y' = \left(\frac{x-2}{1-x} \right)' = \left(\frac{x-2}{-x+1} \right)' = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$$

Câu 17. [NB-TH] Xét các mệnh đề sau.

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ đồng biến trên \mathbb{R} .



Câu 19. [NB-TH] Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = (-\infty; 2]$

$$y' = \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}}. \text{ Giải } y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

y' không xác định khi $x = 2$

+) BBT

x	$-\infty$	1	2
y'	+	0	-
y	$-\infty$	6	5