PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

Giải các phương trình sau:

1). $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=-\frac{1}{2}$

2). $4\sin 3x\cos 2x=1+6\sin x-8\sin^3 x$

3). $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}$

4). $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x\ (1)$

5). $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

6). $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x$

7). $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

8). $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

9). $\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x$

10). $\cos\frac{4}{3}x=\cos^2 x$

LỜI GIẢI

1). $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=-\frac{1}{2}\quad(*)$

Ta thấy $\sin x=0\Leftrightarrow x=m\pi, m\in ¢$ không phải là nghiệm của $(*)$

Nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq m\pi, m\in ¢$, được:

$$\sin x\left(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x\right)=-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x+\sin x\cos 2x+\sin x\cos 3x+\sin x\cos 4x+\sin x\cos 5x=-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x-\sin x+\sin 3x-\sin 2x+\sin 4x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 4x+\sin 6x=-\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x+\sin 6x=0\Leftrightarrow \sin 6x=\sin(-5x)\ \Leftrightarrow x=\frac{k2\pi}{11}\vee x=\pi+h2\pi, k,h\in ¢$$

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{k2\pi}{11} \neq m\pi \\ \pi + h2\pi \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \dfrac{11m}{2} \\ h \neq \dfrac{n-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 11m' \\ h \neq n' \end{cases}$ với $m' = 2m, n' = 2n+1$ và $m, n, m', n' \in \text{¢}$

Kết luận nghiệm phương trình $x = \dfrac{k2\pi}{11}, x = \pi + h2\pi; k \neq 11m', h \neq n', k, h \in \text{¢}$

2). $4\sin 3x \cos 2x = 1 + 6\sin x - 8\sin^3 x \quad (*)$

$\Leftrightarrow 4\sin 3x.\cos 2x = 1 + 2\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin x + 2\sin 5x = 1 + 2\sin 3x$

Ta thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi, m \in \text{¢}$ không phải là nghiệm của $(*)$

Nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi, m \in \text{¢}$, được:

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 2\sin 5x\right)\cos x = \left(1 + 2\sin 3x\right)\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \cos x + \sin 2x + \sin 4x$

$\sin 6x = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7}$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{h2\pi}{5}; k, h \in \text{¢}$

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi \\ \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{h2\pi}{5} \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \dfrac{3+7m}{2} \\ h \neq \dfrac{2+5n}{2} \end{cases}$ với m là số nguyên lẻ, và n là số nguyên chẵn.

3). $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16} \quad (*)$

Ta thấy $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi, m \in \text{¢}$ không phải là nghiệm của $(*)$

Nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m\pi, m \in \text{¢}$, được:

$16\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow 8\sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x \cos 4x \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow 2\sin 8x \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow \sin 16x = \sin x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k2\pi}{15} \vee x = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{h2\pi}{17}; k, h \in \text{¢}$

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{k2\pi}{15} \neq m\pi \\ \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{h2\pi}{17} \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \dfrac{15m}{2} \\ h \neq \dfrac{17n-1}{2} \end{cases}$ với m là số nguyên chẵn và n là số nguyên lẻ.