Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

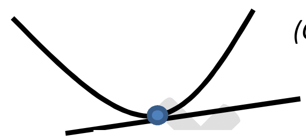
TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C); $M(x_0; y_0) \in (C)$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) **tại** điểm $M(x_0; y_0)$ là

  $d: \ y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$



- Trong đó:
  - $M(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của **tiếp điểm**.
  - $k = f'(x_0)$ là **hệ số góc** của tiếp tuyến.

2. Ghi nhớ:

- Đường thẳng d: $y = \boxed{a}x + b \ (a \neq 0)$ thì có hệ số góc là $k = a$.
- Cho đường thẳng $d: y = ax + b(a \neq 0)$; $d': y = a'x + b'(a' \neq 0)$. Khi đó:
  - $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} k_d = k_{d'} \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
  - $d \perp d' \Leftrightarrow k_d.k_{d'} = -1 \Leftrightarrow a.a' = -1$.
- Nếu tiếp tuyến *song song* với đường thẳng $y = ax + b(a \neq 0)$ thì *hệ số góc* của tiếp tuyến là $k = a$ ***.(nhớ thử lại)***.
- Nếu tiếp tuyến *vuông góc* với đường thẳng $y = ax + b(a \neq 0)$ thì *hệ số góc* của tiếp tuyến là $k = -\dfrac{1}{a}$.
- Trục hoành (trục Ox): $y = 0$.
- Trục tung (trục Oy): $x = 0$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Bài toán 1: Các dạng phương trình tiếp tuyến thường gặp.

Cho hàm số $y = f(x)$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại $M(x_o; y_o)$.

<u>Phương pháp</u>

- **Bước 1.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$.
- **Bước 2**. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$\boxed{d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0}.$$

Chú ý:

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0.
- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C).

☞ **Sử dụng máy tính:**

Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng $d: y = ax + b$.

- **Bước 1:** Tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$. Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))\big|_{x=x_0}}$ bằng cách nhấn $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$ sau đó nhấn $\boxed{=}$ ta được a.
- **Bước 2:** Sau đó nhân với $\boxed{-X}$ tiếp tục nhấn phím $\boxed{+}$ $\boxed{f(x)}$ $\boxed{CALC}$ $X = x_o$ nhấn phím $\boxed{=}$ ta được *b*.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;4)$ là:

A. $y = 9x - 5$. B. $y = 9x + 5$. C. $y = -9x - 5$. D. $y = -9x + 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow k = y'(1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;2)$ là:

$d: y = y'(x_0)(x - x_o) + y_o \Leftrightarrow y = 9(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 5$.

☞ ***Sử dụng máy tính:***

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}(X^3 + 3X^2)\big|_{x=1}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 9.
- Sau đó nhân với $(\boxed{-X})$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{X^3 + 3X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X = 1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -5.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = 9x - 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

A. $y = -18x + 49$. B. $y = -18x - 49$. C. $y = 18x + 49$. D. $y = 18x - 49$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -6x^2 + 12x$

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -5 \Rightarrow M(3;-5) \Rightarrow k = y'(3) = -18.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = -18(x-3) - 5 \Rightarrow y = -18x + 49$.

☞ ***Sử dụng máy tính:***

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(-2X^3 + 6X^2 - 5\right)\Big|_{x=3}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -18.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{-2X^3 + 6X^2 - 5}$ $\boxed{CALC}$ $X = 3$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 49.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = -18x + 49$.

Ví dụ 3. Cho hàm số (C): $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 > 0$, biết $y''(x_o) = -1$ là:

A. $y = -3x + \frac{5}{4}$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = -3x - 2$. D. $y = -3x + \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = x^3 - 4x$, $y'' = 3x^2 - 4$.

Mà $y''(x_o) = -1 \Rightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ (vì $x_0 > 0$).

$\Rightarrow y_0 = -\frac{7}{4} \Rightarrow k = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $d: y = -3(x-1) - \frac{7}{4} \Rightarrow y = -3x + \frac{5}{4}\cdot$

☞ ***Sử dụng máy tính:***

- Nhập $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{4}X^4 - 2X^2\right)\Big|_{\mathrm{x}=1}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -3.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{\frac{1}{4}X^4 - 2X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X = 1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được $\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y = -3x + \frac{5}{4}\cdot$

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ có hệ số góc k cho trước.

Phương pháp

- **Bước 1**. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm và tính $y'=f'(x)$.
- **Bước 2**. Hệ số góc tiếp tuyến là $k=f'\left(x_0\right)$. Giải phương trình này tìm được x_0, thay vào hàm số được y_0.
- **Bước 3**. Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng.

$$\boxed{d: y=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0}$$

Chú ý: Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

- Tiếp tuyến $d\ //\ \Delta: y=ax+b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=a$.
- Tiếp tuyến $d\perp\Delta: y=ax+b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\frac{1}{a}$.
- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc của tiếp tuyến d là $k=\pm\tan\alpha$.

☞ **Sử dụng máy tính:**

Nhập: $k(-X)+f(x)$ $\boxed{CALC}$ $X=x_0$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được b. Phương trình tiếp tuyến là $d: y=kx+b$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y=x^3-3x+2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=9x-14 \\ y=9x+18 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=9x+15 \\ y=9x-11 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} y=9x-1 \\ y=9x+4 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=9x+8 \\ y=9x+5 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3x^2-3$, $k=y'\left(x_0\right)=9 \Leftrightarrow 3x_0{}^2-3=9 \Leftrightarrow x_0{}^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$.

+ Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=4$ ta có tiếp điểm $M(2;4)$.

  Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=9(x-2)+4 \Rightarrow y=9x-14$.

+ Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$ ta có tiếp điểm $N(-2;0)$.

  Phương trình tiếp tuyến tại N là: $y=9(x+2)+0 \Rightarrow y=9x+18$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=9x-14$ và $y=9x+18$.

☞ **Sử dụng máy tính:**

+ Với $x_0=2$ ta nhập $9(-X)+X^3-3X^2+2$ $\boxed{CALC}$ $X=2$ nhấn dấu $\boxed{=}$

ta được $-14 \Rightarrow y=9x-14$.

+ Với $x_0=-2$ ta nhập $9(-X)+X^3-3X^2+2$ $\boxed{CALC}$ $X=-2$ nhấn dấu $\boxed{=}$

ta được $18 \Rightarrow y = 9x + 18$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+1}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x - y + 2 = 0$.

A. $y = 3x + 14$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = 3x - 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$, $\Delta: 3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng Δ nên $k = \dfrac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 2 = 1 \\ x_0 + 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$.

+ Với $x_0 = -1$ nhập $3(-X) + \dfrac{2X+1}{X+2}$ $\boxed{CALC}$ $X = -1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 2

$\Rightarrow d_1: y = 3x + 2$ (loại do trùng với Δ).

+ Với $x_0 = -3$ $\boxed{CALC}$ $X = -3$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được $14 \Rightarrow d: y = 3x + 14$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y = 3x + 14$.

Dạng 3. **Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$.**

Phương pháp

Cách 1.

- **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng:

$$d: y = k(x - x_A) + y_A \ (*)$$

- **Bước 2:** d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}.$$

- **Bước 3:** Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình $(*)$, ta được tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2.

- **Bước 1.** Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0) = f'(x_0)$ theo x_0.
- **Bước 2**. Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y = y'(x_0).(x - x_0) + y_0 \ (**)$

Do điểm $A\left(x_A;y_A\right)\in d$ nên $y_A=y'\left(x_0\right).\left(x_A-x_0\right)+y_0$ giải phương trình này sẽ tìm được x_0.

- **Bước 3**. Thế x_0 vào $(**)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý: Đối với dạng viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm việc tính toán tương đối mất thời gian. Ta có thể sử dụng máy tính thay các đáp án:

Cho $f\left(x\right)$ bằng kết quả các đáp án. Vào $\boxed{MODE}\rightarrow\boxed{5}\rightarrow\boxed{4}$ nhập hệ số phương trình. *Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.*

Ví dụ minh họa:

Ví dụ. Cho hàm số $\left(C\right):y=-4x^3+3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(-1;2\right)$.

A. $\left[\begin{array}{l}y=-9x-7\\y=2\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}y=4x+2\\y=x+1\end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l}y=x-7\\y=3x-5\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}y=-x-5\\y=2x-2\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-12x^2+3$.

+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ đi qua $A\left(-1;2\right)$ với hệ số góc k có phương trình là: $d:y=k\left(x+1\right)+2$.

+ d là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}-4x^3+3x+1=k\left(x+1\right)+2 & (1)\\-12x^2+3\quad=k & (2)\end{cases}$$

Thay k từ $\left(2\right)$ vào $\left(1\right)$ ta được $-4x^3+3x+1=\left(-12x^2+3\right)\left(x+1\right)+2$

$$\Leftrightarrow 8x^3+12x^2-4=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+1\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

+ Với $x=-1\Rightarrow k=-9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-9x+7$.

+ Với $x=\frac{1}{2}\Rightarrow k=0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=2$.

$\boxed{\textbf{Dạng 4.}}$ **Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $\left(C_1\right):y=f\left(x\right)$ và $\left(C_2\right):y=g\left(x\right)$.**

Phương pháp

- **Bước 1.** Gọi d tiếp tuyến chung của $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và $\left(C_1\right)$ thì phương trình d có dạng:

$$y=f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)\ (***)$$

- **Bước 2**. Dùng điều kiện tiếp xúc của d và (C_2), tìm được x_0.
- **Bước 3**. Thế x_0 vào $(***)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ. Cho hai hàm số:

$$(C_1): y=f(x)=2\sqrt{x},\ x>0 \text{ và } (C_2): y=g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2},\ -\sqrt{8}<x<\sqrt{8}.$$

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số là:

A. $y=\frac{1}{2}x+2.$ B. $y=\frac{1}{2}x-1.$ C. $y=\frac{1}{2}x+5.$ D. $y=\frac{1}{2}x-3.$

Hướng dẫn giải

+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của $(C_1),(C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là:

$$y=f'(x)(x-x_0)+y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+2\sqrt{x_0}$$

+ d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2}=\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0} & (1)\\ \frac{-x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x_0}} & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình hoành độ tiếp điểm của d và (C_2).

$$\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2}=-\frac{x^2}{2\sqrt{8-x^2}}-\frac{2\sqrt{8-x^2}}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{8}<x<\sqrt{8}\\ x\neq 0\\ x(8-x^2)=-x^3-4(8-x^2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{8}<x<\sqrt{8}\\ x\neq 0\\ x^2-2x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2.$$

Thay $x=-2$ vào (2) ta được $\frac{1}{\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0=4.$

Vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm là: $y=\frac{1}{2}x+2$.

Bài toán 2: Một số công thức nhanh và tính chất cần biết.

Bài toán 2.1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0,\ x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ tại M thuộc (C) và I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Ta luôn có:

(I). Nếu $\Delta\perp IM$ thì chỉ tồn tại 2 điểm M thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) đối xứng qua I và $x_M=\dfrac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}$.

(II). M luôn là trung điểm của AB (với A,B là giao điểm của Δ với 2 tiệm cận).

(III). Diện tích tam giác IAB không đổi với mọi điểm M và $S_{\Delta IAB}=2\dfrac{|bc-ad|}{c^2}$.

(IV). Nếu E,F thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) và E,F đối xứng qua I thì tiếp tuyến tại E,F song song với nhau. (suy ra một đường thẳng d đi qua E,F thì đi qua tâm I).

Chứng minh:

- Ta có: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ là giao điểm của 2 tiệm cận.
- Gọi $M\left(x_M;\dfrac{a\,x_M+b}{cx_M+d}\right)\in(C)\left(x_M\neq-\dfrac{d}{c}\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=\frac{ad-bc}{(c\,x_M+d)^2}(x-x_M)+\frac{ax_M+b}{cx_M+d}.$$

Chứng minh (I):

- $\overrightarrow{IM}\left(x_M+\dfrac{d}{c};\dfrac{bc-ad}{c(cx_M+d)}\right)$; $\vec{u}_\Delta\left(1;\dfrac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}\right)$
- $\Delta\perp IM\Rightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow x_M+\dfrac{d}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx_M+d)}.\dfrac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(cx_M+d)^4-(ad-bc)^2}{c(cx_M+d)^3}=0\Leftrightarrow x_M=\frac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}.$$

- *Cách nhớ:* $\underbrace{cx_M+d}_{\text{maãu soácuûa haøm soá}}=\pm\underbrace{\sqrt{|ad-bc|}}_{\text{töûsoácuûa ñaïo haøm}}$

Chứng minh (II):

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $A\left(2x_M+\dfrac{d}{c};\ \dfrac{a}{c}\right)$.

hoc360.net

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $B\left(-\frac{d}{c};\frac{acx_M+2bc-ad}{c\left(cx_M+d\right)}\right)$.
- Xét $\begin{cases} x_A+x_B=2x_M+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}=2x_M \\ y_A+y_B=\frac{a}{c}+\frac{acx_M+2bc-ad}{c\left(cx_M+d\right)}=2.\frac{ax_M+b}{cx_M+d}=2y_M \end{cases}$.
- Vậy M luôn là trung điểm của AB.

Chứng minh (III):

- $\overrightarrow{IA}\left(\frac{2\left(cx_M+d\right)}{c};\ c\right)$ và $\overrightarrow{IB}\left(0;\ \frac{2\left(bc-ad\right)}{c\left(cx_M+d\right)}\right)$.
- ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{IA}\right|.\left|\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{2}.\left|\frac{2\left(cx_M+d\right)}{c}\right|.\left|\frac{2\left(bc-ad\right)}{c\left(cx_M+d\right)}\right|=2\frac{\left|bc-ad\right|}{c^2}=\text{hằng số.}$$

- Vậy diện tích ΔIAB không đổi với mọi điểm M.

Chứng minh (IV):

- Gọi $E\left(x_E;\frac{ax_E+b}{cx_E+d}\right)\in(C)\left(x_E\neq-\frac{d}{c}\right)\Rightarrow F\left(-\frac{2d}{c}-x_E;\ \frac{2a}{c}-\frac{ax_E+b}{cx_E+d}\right)$

  (E,F đối xứng qua I).
- Phương trình tiếp tuyến tại E có hệ số góc: $k_E=\frac{ad-bc}{\left(cx_E+d\right)^2}$ (1).
- Phương trình tiếp tuyến tại F có hệ số góc:

$$k_F=\frac{ad-bc}{\left[c\left(-\frac{2d}{c}-x_E\right)+d\right]^2}=\frac{ad-bc}{\left(-2d-cx_E+d\right)^2}=\frac{ad-bc}{\left(-d-cx_E\right)^2}=\frac{ad-bc}{\left(cx_E+d\right)^2}\ (2).$$

- Từ (1, 2) suy ra $k_E=k_F$.

Bài toán 2.2: Cho hàm số: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là (C), $(c\neq0, ad-bc\neq0)$.Gọi điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ trên (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho $OA=n.OB$.

Khi đó x_0 thoả: $cx_0+d=\pm\sqrt{n.\left|ad-bc\right|}$.

Hướng dẫn giải:

- Xét hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$. Ta có $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)\in\left(C\right)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại M ta có phương trình. $\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\Rightarrow y=\dfrac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)^2}(x-x_0)+\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\ \Rightarrow A\left(-\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{ad-bc};0\right)$.

  $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{\left(cx_0+d\right)^2}\right)$.

- Ta có $OA=\left|\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{ad-bc}\right|=\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{\left|ad-bc\right|}$

  $OB=\left|\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{\left(cx_0+d\right)^2}\right|=\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{\left(cx_0+d\right)^2}$

  (vì A,B không trùng O nên $acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0$).

- Ta có

  $$OA=n.OB\Leftrightarrow\frac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{\left|ad-bc\right|}=n.\frac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{\left(cx_0+d\right)^2}$$

  $$\Leftrightarrow\frac{1}{\left|ad-bc\right|}=n.\frac{1}{\left(cx_0+d\right)^2}\Leftrightarrow\left(cx_0+d\right)^2=n.\left|ad-bc\right|\Leftrightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{n.\left|ad-bc\right|}.$$

Các em bắt đầu theo dõi phần trắc nghiệm ở dưới nhé. Bắt đầu làm từ bài dễ đến bài khó.