PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT ĐỐI VỚI sin VÀ cos

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(1\right)$

Cách giải.Xét 2 trường hợp :

- **Trường hợp 1 :Xét** $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ **.Thay vào (1) xem thoả hay không thoả.Kết luận**
- **Trường hợp 2:Xét** $\cos x \ne 0$. **Chia hai vế của (1) cho** $\cos^2 x$ **,rồi đưa về phương trình bậc hai theo** $\tan x$ **,giải bình thường.**

$\left(1\right) \Leftrightarrow \left(a-d\right)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0.$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1). $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\cos x - \cos^2 x = 4$.

2). $3\sin^2 2x - \sin 2x\cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$.

3). $2\sin^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = -1$.

4). $3\sin^2\dfrac{x}{2} + 4\sin x + \left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2\dfrac{x}{2} = 0$.

5). $\sqrt{3}\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$.

6). $9\sin^2 x - 30\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 25$.

7). $\sin 2x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x$.

8). $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

LỜI GIẢI

1). $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\cos x - \cos^2 x = 4\ \left(1\right)$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$: $\left(1\right) \Leftrightarrow 2 = 4$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \ne 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sqrt{3}\sin\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan x - 1 = 4\left(1+\tan^2 x\right)$$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0$ phương trình vô nghiệm

2). $3\sin^2 2x - \sin 2x\cos 2x - 4\cos^2 2x = 2\left(1\right)$

Trường hợp 1: $\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = 1$: $\left(1\right) \Leftrightarrow 3 = 2$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos 2x \ne 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 2x$ được

$$\frac{3\sin^2 2x}{\cos^2 2x} - \frac{\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x} - \frac{4\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x} \Leftrightarrow 3\tan^2 2x - \tan 2x - 4 = 2\left(1+\tan^2 2x\right)$$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - \tan 2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \tan 2x = -2 \vee \tan 2x = 3$

$\circ \tan 2x = -2 \Leftrightarrow 2x = \arctan\left(-2\right) + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan\left(-2\right) + \dfrac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\circ \tan 2x = 3 \Leftrightarrow 2x = \arctan 3 + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan 3 + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $2\sin^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = -1$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$: $\left(1\right) \Leftrightarrow 2 = -1$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \ne 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được:

$2\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\left(\sqrt{3}-1\right)=-\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow 3\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\boxed{4).\ 3\sin^2\frac{x}{2}+4\sin x+\left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2}=0\ \ (1)}$

$(1)\Leftrightarrow 3\sin^2\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\left(4\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2}=0\left(1'\right)$

Trường hợp 1: $\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1$: $\left(1'\right)\Leftrightarrow 3=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos\frac{x}{2}\neq 0$. Chia hai vế của (1') cho $\cos^2\frac{x}{2}$ được:

$\Leftrightarrow 3\tan^2\frac{x}{2}+8\tan\frac{x}{2}+8\sqrt{3}-9=0$

$\Delta'=16-3.\left(8\sqrt{3}-9\right)=16-24\sqrt{3}+27=\left(3\sqrt{3}-4\right)^2$

$\tan\frac{x}{2}=\frac{-4-3\sqrt{3}+4}{3}=-\sqrt{3}$ hoặc $\tan\frac{x}{2}=\frac{-4+3\sqrt{3}-4}{3}=\frac{3\sqrt{3}-8}{3}$

$\circ\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\circ\tan\frac{x}{2}=\frac{3\sqrt{3}-8}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=2\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, $x=2\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$