LỜI GIẢI

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\cos 2x+\cos x\right)\left(1+\cot^2 x\right)$

2). $2\sin^3 x-3=\left(3\sin^2 x+2\sin x-3\right)\tan x$

3). $\left(2\tan^2 x-1\right)\cos x=2-\cos 2x$

4). $5\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2$

5). $(\tan x-1)\sin^2 x+3\cos^2 x-\frac{3}{2}\sin 2x=0$

6). $\frac{\left(\sin x+\cos x\right)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]$

LỜI GIẢI

1). $4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\cos 2x+\cos x\right)\left(1+\cot^2 x\right)\ (*)$

Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in ¢$

Các bạn để ý góc ở vế trái, nên ý tưởng biến đổi tích thành tổng ở vế trái

$(*)\Leftrightarrow 2\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin x\left(2\cos^2 x-1+\cos x\right)\frac{1}{\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x-1\right)=\sqrt{3}\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)\frac{1}{\sin x}$

Phân tích $2\cos^2 x+\cos x-1=\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$ *và quy đồng mẫu được:*

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-1\right)=\sqrt{3}\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x-1\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

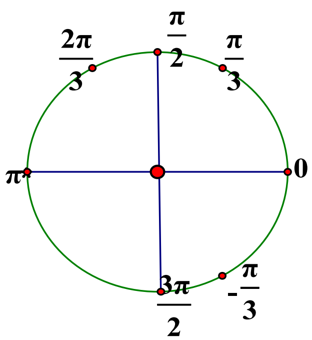
$\Leftrightarrow 2\cos x-1=0 \quad \vee \quad \sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}=0$

Với $2\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

Với $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{3}-\cos x.\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác :



Vậy nghiệm $x=\pi+k2\pi$ loại

Kết luận nghiệm phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in Z)$

$$\boxed{2).\ 2\sin^3 x-3=\left(3\sin^2 x+2\sin x-3\right)\tan x(*)}$$

Ý tưởng: Đổi tanx thành sin chia cos, sau đó quy đồng mẫu...

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in ¢$

$(*) \Leftrightarrow 2\sin^3 x-3=\left[3\left(\sin^2 x-1\right)+2\sin x\right]\frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin^3 x-3\right)=\left(-3\cos^2 x+2\sin x\right)\sin x$

Phân phối sau đó chuyển các phần tử vế phải qua vế trái được:

$\Leftrightarrow 2\cos x\sin^3 x-3\cos x+3\cos^2 x\sin x-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x.\sin^3 x-2\sin^2 x\right)+\left(3\cos^2 x\sin x-3\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\sin x\cos x-1\right)+3\cos x\left(\sin x\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x\cos x-1\right)\left(2\sin^2 x+3\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos x-1=0 \quad \vee \quad 2\sin^2 x+3\cos x=0$

Với $\sin x\cos x-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \sin 2x=2$ (loại)

Với $2\sin^2 x+3\cos x=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+3\cos x=0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = 2$ (loại)

So với điều kiện thì $\cos x = -\frac{1}{2}$ (nhận) $\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in Z)$

Nghiệm phương trình: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in Z)$