Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\dfrac{1-2\sin x-2\sin 2x+2\cos x}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)$

2). $\cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x+\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$

3). $\dfrac{4\cos^2\dfrac{x}{2}+2\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)-\sqrt{3}\cos\left(2x-3\pi\right)-3}{1-2\sin x}=0$

4). $\dfrac{\sin x.\sin 2x+2\sin x.\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$

5). $1+\cot 2x=\dfrac{4\sin^2 x}{1-\cos 4x}$

6). $\cos 2x+\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)=\dfrac{2\cos x+2\sin 2x-2\sin x-1}{2\cos x-1}$

7). $\dfrac{2\sqrt{3}\sin 2x\left(1+\cos 2x\right)-4\cos 2x.\sin^2 x-3}{2\sin 2x-1}=0$

8). $\sin^2 x+\dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=2\cos 2x$

LỜI GIẢI

1). $\dfrac{1-2\sin x-2\sin 2x+2\cos x}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $2\sin x-1\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{cases},\left(k\in ¢\right)$

Ý tưởng: Các bạn để ý: tử của vế trái, tử số phân tích được thành nhân tử chung, và rút gọn được mẫu...ta làm như sau:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{1-2\sin x-4\sin x\cos x+2\cos x}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\left(2\sin x-1\right)-2\cos x\left(2\sin x-1\right)}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2\sin x-1)(-1-2\cos x)}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow -1-2\cos x=2\cos^2 x-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0 \;\; \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vee \cos x=-1$

Với $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}\;\; x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in Z)$

Với $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi \quad (k\in Z)$.

Kết hợp với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$.

2). $\cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x+\cos^3 x-1}{\cos^2 x}(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

Ý tưởng: Biến đổi VP ta rút gọn được $\tan^2 x$....

$(*)\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\quad \Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1+\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1+\cos x-\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x=0 \;\; \Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=1$ hoặc $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

So với điều kiện $\cos x\neq 0$ hai giá trị này đều nhận.

Với $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi \quad (k\in Z)$.

Với $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\dfrac{2\pi}{3}\;\; \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \quad (k\in Z)$.

Nghiệm của phương trình: $x=k2\pi; x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

3). $\dfrac{4\cos^2\dfrac{x}{2}+2\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)-\sqrt{3}\cos(2x-3\pi)-3}{1-2\sin x}=0\quad (*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $1-2\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \neq \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{cases}, (k \in Z).$

Ý tưởng: Hạ bậc, sau đó rút gọn...

Ta có: $g\, 4\cos^2\frac{x}{2} = 4.\frac{1+\cos x}{2} = 2(1+\cos x).$

$$g\, 2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right) = 1+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right) = 1+\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$= 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = 1-\sin 2x.$$

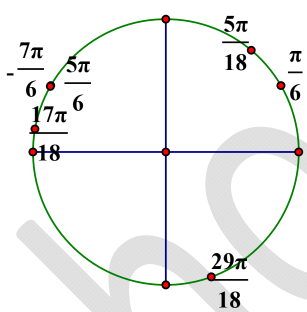
$(*) \Leftrightarrow 2(1+\cos x)+1-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-3=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+2\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=-2\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=-\cos x \Leftrightarrow \cos 2x.\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x.\sin\frac{\pi}{6}=-\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi-x) \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=-\frac{7\pi}{6}+k2\pi, (k \in Z)$

Biểu diễn nghiệm



Ta thấy hai đầu mút $-\frac{7\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$ trùng nhau, vậy nghiệm $x=-\frac{7\pi}{6}+k2\pi$ loại.

Còn nghiệm $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$ được biểu diễn ba đầu mút $\frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$ đều khác hai đầu mút $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$.

Vậy nghiệm $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$ nhận.

Kết luận nghiệm phương trình $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$.

Để biết nghiệm $x=\alpha+\frac{k2\pi}{n},(k,n\in ¢)$, có bao nhiêu đầu mút, ta lấy $k2\pi:\left(\frac{k2\pi}{n}\right)=n$ vậy nghiệm này có n đầu mút, sau đó chọn k = 0,1, 2, 3,..., n – 1.

4). $\dfrac{\sin x.\sin 2x+2\sin x.\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in ¢$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x.\cos x+2\sin x.\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin x.\cos x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1+2\sin x\cos x)=\sqrt{3}\cos 2x(\sin x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2=\sqrt{3}(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow\sin x+\cos x=\sqrt{3}(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x=-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow\tan x=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{1-\sqrt{3}}\quad\Leftrightarrow\tan x=\tan\frac{5\pi}{12}\quad\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in Z).$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in Z)$

5). $1+\cot 2x=\dfrac{4\sin^2 x}{1-\cos 4x}(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ 1-\cos 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos 4x\neq 1\end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow 1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{4\sin^2 x}{2\sin^2 2x}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 2x}$

$\Leftrightarrow (\sin 2x+\cos 2x)\sin 2x = 1-\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 1 + \sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x-1)(\sin 2x+1)+\cos 2x(\sin 2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x+1)(\sin 2x-1+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+1=0 \ \vee \ \sin 2x+\cos 2x-1=0$

Với $\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-1$ (nhận) $\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$

Với $\sin 2x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=k\pi$.

Ta thấy $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ thì $\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=-1\neq 0$ và $\cos 4x=\cos(-\pi+k4\pi)=-1\neq 0$. Vậy nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ nhận.

Tương tự thay 2 nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=k\pi$ thì nghiệm $x=k\pi$ làm sin 2x = 0, nên nghiệm này bị loại.

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{4}+k\pi (k\in Z)$

6). $\cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin x)=\frac{2\cos x+2\sin 2x-2\sin x-1}{2\cos x-1}(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $2\cos x-1\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\neq\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z).$

Phân tích tử số của VP thành nhân tử, sau đó rút gọn...

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin x)=\frac{(2\cos x-1)+2\sin x(2\cos x-1)}{2\cos x-1}$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin x)=\frac{(2\cos x-1)(1+2\sin x)}{2\cos x-1}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}=0 \;\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\sin x=-1$.

Với $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$

Với $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

7). $\dfrac{2\sqrt{3}\sin 2x\left(1+\cos 2x\right)-4\cos 2x.\sin^2 x-3}{2\sin 2x-1}=0\left(*\right)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $2\sin 2x-1\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\neq \dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x\neq \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x\neq \dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{cases},\left(k\in Z\right)$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x+2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-2\cos 2x\left(1-\cos 2x\right)-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin 4x+2\cos^2 2x-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin 4x+1+\cos 4x-3=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{2}\cos 4x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin 2x.\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 2x.\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\sin 4x.\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos 4x.\cos\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$

Ta có $4x-\dfrac{\pi}{3}=2\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ áp dụng công thức nhân đôi, ta được:

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1-2\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\left(1-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=0 \quad \Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \vee \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

Với $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi, (k\in Z)$

Với $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in Z)$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi; x=\frac{\pi}{3}+k\pi, (k\in Z)$.

8). $\sin^2 x+\frac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=2\cos 2x$

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ 1-\cos^2 x+\frac{4\cos^4 x}{4\sin x.\cos x}=2(2\cos^2 x-1) \quad \Leftrightarrow \ \cot x.\cos^2 x=5\cos^2 x-3$

Chia hai vế cho $\cos^2 x$ (dựa vào điều kiện $\cos x\neq 0$)

$\Leftrightarrow \ \frac{1}{\tan x}=5-\frac{3}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \ \frac{1}{\tan x}=5-3(1+\tan^2 x) \quad \Leftrightarrow \ 3\tan^3 x-2\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \ \tan x=1 \ \Leftrightarrow \ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in ¢)$