Dạng: $\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x+\chi\sin x+\delta\cos x+\delta=0$

Biến đổi để đưa về dạng: $m\cos x\left(a\sin x-b\right)+n\left(a\sin x-b\right)\left(c\sin x+d\right)=0$

Hoặc $m\sin x\left(a\cos x-b\right)+n\left(a\cos x-b\right)\left(c\cos x+d\right)=0$

Câu :Giải các phương trình sau:

1). $8\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-3\sqrt{3}\sin 4x-9\sin 2x$

2). Tìm nghiệm $x\in\left(0;\pi\right)$ của phương trình: $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

3). $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$ [DB A11]

4). $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-5\sin x+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x+3+\sqrt{3}}{2\cos x+\sqrt{3}}=1$

5). $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$

6). $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x-2\sqrt{2}\cos x+4=0$

7). $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2$

8). $\cos 4x-3\sin 4x+9\cos 2x-3\sin 2x+5=0$

LỜI GIẢI

1). $8\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-3\sqrt{3}\sin 4x-9\sin 2x\left(*\right)$

LỜI GIẢI

$$\left(*\right)\Leftrightarrow 8\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-6\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-9\sin 2x$$

Phân phối, chuyển vế phải sang vế trái sau đó rút gọn ta được:

$$\Leftrightarrow\left(6\sin^2 2x-9\sin 2x+3\right)+\left(3\sqrt{3}\cos 2x-6\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin^2 2x-3\sin 2x+1\right)+\left(\sqrt{3}\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x\right)=0$$

Chú ý: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ *với* x_1,x_2 *là nghiệm của* $ax^2+bx+c=0$

Áp dụng: $2\sin^2 2x-3\sin 2x+1=\left(\sin 2x-1\right)\left(2\sin x-1\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\sin 2x-1\right)\left(2\sin x-1\right)-\sqrt{3}\cos 2x\left(\sin 2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin 2x - 1\right)\left(\sin 2x - 1 - \sqrt{3}\cos 2x\right) = 0 \;\; \Leftrightarrow 2\sin 2x - 1 = 0 \;\vee \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x - 1 = 0$$

Với $2\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \left(k \in Z\right)$

Với $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1 \;\; \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \;\; \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}.$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \left(k \in \text{¢}\right)$$

Nghiệm phương trình: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \; \left(k \in \text{¢}\right)$

2). Tìm nghiệm $x \in \left(0;\pi\right)$ của phương trình: $5\cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\left(*\right)$

LỜI GIẢI

Ý tưởng: Biến đổi vế phải thành sin2x và cos2x , sau đó biến đổi thành tích...

$\left(*\right) \Leftrightarrow 5\cos x + \sin x - 3 = \sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\cos x + \sin x - 3 = \sin 2x + 2\cos^2 x - 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 + 2\sin x\cos x - \sin x = 0$

Chú ý: $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x - 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x - 1\right) + \sin x\left(2\cos x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x + \sin x - 2\right) = 0 \;\; \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \;\; \vee \;\; \cos x + \sin x - 2 = 0$

Với $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \;\; \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + m2\pi \end{array}\right. \;\; \left(m, k \in Z\right).$

Với $\cos x + \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ (vô nghiệm)

Vì $x \in \left(0;\pi\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < \pi \\ 0 < -\frac{\pi}{3} + m2\pi < \pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} < k2\pi < \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} < m2\pi < \frac{4\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} < m < \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \pm\frac{\pi}{3}.$

3). $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$ (1)

$\Leftrightarrow \left(6\cos x - 6\sin x\cos x\right) + \left(1 - 2\sin^2 x + 9\sin x - 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow -6\cos x\left(\sin x - 1\right) - \left(2\sin^2 x - 9\sin x + 7\right) = 0$

$\Leftrightarrow -6\cos x\left(\sin x - 1\right) - \left(\sin x - 1\right)\left(2\sin x - 7\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x - 1\right)\left(-6\cos x - 2\sin x + 7\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - 1 = 0 \vee 6\cos x + 2\sin x - 7 = 0$

Với $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in ¢$

Với $6\cos x + 2\sin x - 7 = 0$ phương trình vô nghiệm (vì $6^2 + 2^2 < 7^2$)

Nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in ¢$

4). $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 5\sin x + \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x + 3 + \sqrt{3}}{2\cos x + \sqrt{3}} = 1$ (*)

Điều kiện $2\cos x + \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 5\sin x + \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x + 3 + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 5\sin x - \sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\cos x\right) + \left(-\cos 2x - 5\sin x + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x\left(2\sin x - 1\right) + \left(2\sin^2 x - 5\sin x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x\left(2\sin x - 1\right) + \left(2\sin x - 1\right)\left(\sin x - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - 1\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hoặc $\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in ¢$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

5). $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \left(\sin 2x - \sin x\right) + \left(2\cos 2x + 4\cos x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x) + (4\cos^2 x + 4\cos x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x + 3)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$ hoặc $\sin x + 2\cos x + 3 = 0$ (vô nghiệm, vì $1^2 + 2^2 < 3^2$)

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

6). $2\sqrt{2}\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x - 2\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos x\right) + \left(-\cos 2x - 7\sin x + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x(2\sin x - 1) + \left(2\sin^2 x - 7\sin x + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x(2\sin x - 1) + (\sin x - 3)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\left(2\sqrt{2}\cos x + \sin x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 1$ hoặc $2\sqrt{2}\cos x + \sin x = 3$.

Với $2\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với $2\sqrt{2}\cos x + \sin x = 3 \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(với $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \cos\alpha$ và $\dfrac{1}{3} = \sin\alpha$).

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$, $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

7). $\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x + 3\cos x - 2$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x + 3\cos x - 2 \Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x) + (\cos 2x - 3\cos x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + \left(2\cos^2 x - 3\cos x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 1$ hoặc $\sin x + \cos x = 1$.

$\Leftrightarrow 2\cos x = 1$ hoặc $\sin x + \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

8). $\cos 4x-3\sin 4x+9\cos 2x-3\sin 2x+5=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1-6\sin 2x.\cos 2x+9\cos 2x-3\sin 2x+5=0$

$\Leftrightarrow \left(-6\sin 2x.\cos 2x-3\sin 2x\right)+\left(2\cos^2 2x+9\cos 2x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow -3\sin 2x\left(2\cos 2x+1\right)+\left(2\cos 2x+1\right)\left(\cos 2x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos 2x+1\right)\left(-3\sin 2x+2\cos 2x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x+1=0$ hoặc $-3\sin 2x+2\cos 2x+4=0$

Với $2\cos 2x+1=0\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Với $-3\sin 2x+2\cos 2x+4=0$. Phương trình vô nghiệm (vì $(-3)^2+2^2<4^2$).

1.30: Giải các phương trình :

1). $1-\sin x=\left(\sin x+\cos x\right)\cos x$

2). $1+\sin x+\sin 2x+\cos x+\cos 2x=0$

3). $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos x3x$

4). $\sin 2x=2\cos x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\quad (1)$

LỜI GIẢI

1). $1-\sin x=\left(\sin x+\cos x\right)\cos x\quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow 1-\sin x=\sin x\cos x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\sin x-\sin x\cos x=0\Leftrightarrow \sin^2 x-\sin x-\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x-1-\cos x\right)=0\Leftrightarrow \sin x=0\ \vee\ \sin x-\cos x=1$

Với $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$

Với $\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Nghiệm phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pi+k2\pi,\left(k\in ¢\right).$

2). $1+\sin x+\sin 2x+\cos x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\sin 2x+\cos x+\left(1+\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+2\sin x\cos x+\cos x+2\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+2\sin x\cos x\right)+\left(\cos x+2\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1+2\cos x\right)+\cos x\left(1+2\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1+2\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow 1+2\cos x=0 \quad \vee \quad \sin x+\cos x=0$

Với $1+2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi.$

Với $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \left(k\in z\right)$

3). $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos x3x$

$\Leftrightarrow \left(\sin 3x+\sin x\right)+\sin 2x=\left(\cos 3x+\cos x\right)+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x+\sin 2x=2\cos 2x.\cos x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=\cos 2x\left(2\cos x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x+1\right)\left(\sin 2x-\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+1=0 \vee \sin 2x-\cos 2x=0$

Với $2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Với $\sin 2x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in ¢\right)$

4). $\sin 2x=2\cos x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x-1\right)-\sqrt{3}\left(\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sin x-1\right)\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x=1$ hoặc $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Nghiệm phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$