PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI sin VÀ cos

4)PHƯƠNG TRÌNH DẠNG : $a\left(\sin x\pm\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0\left(1\right)$

Cách giải.Đặt :

$t=\sin x+\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$ $t=\sin x-\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

$t=\cos x-\sin x\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

Thay vào (1) rồi giải phuong trình bậc 2 theo t.

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1). $2\sin 2x-3\sqrt{3}\left(\sin x+\cos x\right)+5=0$ 2). $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos-2=0.$

3). $2\sqrt{2}\left(\sin x-\cos x\right)-2\sin 2x=1$ 4). $\sin x+\cos x-4\sin x\cos x-1=0.$

5). $\sin x\cos x-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1=0.$ 6). $\sin x\cos x=6(\sin x-\cos x)-1.$

7). $\sin x-\cos x=2\sqrt{6}\sin x\cos x.$ 8). $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=3-\sin 2x.$

9). $2\sin 2x+3\sqrt{3}(\sin x+\cos x)+5=0.$ 10). $(1-\sqrt{2})(1+\sin x-\cos x)=\sin 2x$.

11). $(1+\sqrt{2})(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x-1-\sqrt{2}=0.$

LỜI GIẢI

1). $2\sin 2x-3\sqrt{3}\left(\sin x+\cos x\right)+5=0$

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2\left(t^2-1\right)-3\sqrt{3}t+5=0\Leftrightarrow 2t^2-3\sqrt{3}t+3=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}\vee t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

So với điều kiện nhận $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{4}=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Nghiệm phương trình: $x=\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+k2\pi,x=\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

2). $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos-2=0.$

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Ta được : $2t+3(t^2-1)-2=0\Leftrightarrow 3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow t=1\vee t=-\dfrac{5}{3}$ (loại).

Với $t=1\Leftrightarrow\sin x.\cos x=1$ $\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ $\Leftrightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5). $\sin x\cos x-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1=0.$

Đặt $t=\sin x+\cos x$ (ĐK: $|t|\le\sqrt{2}$) $\Rightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2$ $\Rightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

Ta được : $\dfrac{t^2-1}{2}-\sqrt{2}t+1=0$ $\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1+\sqrt{2} \\ t=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

So với điều kiện chọn $t=-1+\sqrt{2}$. Có nghĩa $\sin x+\cos x=-1+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1+\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) .$$

Nghiệm của phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi, x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$