PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

DẠNG:

◦ $a\sin^2 u + b\sin u + c = 0\left(a \neq 0\right)$. Đặt $t = \sin u$, điều kiện $-1 \leq t \leq 1$

◦ $a\cos^2 u + b\cos u + c = 0\left(a \neq 0\right)$. Đặt $t = \cos u$, điều kiện $-1 \leq t \leq 1$

◦ $a\tan^2 u + b\tan u + c = 0\left(a = 0\right)$. Đặt $t = \tan u$, điều kiện $\cos u \neq 0$

◦ $a\cot^2 u + b\cot u + c = 0\left(a \neq 0\right)$. Đặt $t = \cot u$, điều kiện $\sin u \neq 0$

Câu 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$

4). $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

5). $4\cos^2 x - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$

6). $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$

7). $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0$

8). $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

LỜI GIẢI

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1). Đặt $\cos x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$. So với điều kiện nhận cả hai nghiệm.

Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ (1). Đặt $\sin x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{3}{2}$. So với điều kiện nhận $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$ (1). Đặt $\sin 2x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 13t + 5 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{13 + \sqrt{149}}{2} \vee t = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$. So với điều kiện nhận $t = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$, suy ra : $\sin 2x = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2} + k2\pi \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2}}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi - \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2}}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

Hoặc đặt $\frac{13-\sqrt{149}}{2}=\sin\alpha$, suy ra $\sin 2x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\alpha+k2\pi\\2x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha}{2}+k\pi\\x=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi, x=\dfrac{\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4). $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0$ (1). Đặt $\tan x=t,\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow t=1\vee t=-\sqrt{3}$.

Với $t=1\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

So với điều kiện nhận cả hai nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

5). $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}=0$ (1)

Đặt $\cos x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\vee t=\frac{\sqrt{3}}{2}$. So với điều kiện hai nghiệm đều nhận

Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình:

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

6). $\cot^2 x+4\cot x+3=0$

Đặt $\cot x=t,(x\neq k\pi)$. Phương trình (1) trở thành: $t^2+4t+3=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-3$

Với $t=-1\Leftrightarrow \cot x=-1\Leftrightarrow \cot x=\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=-3\Leftrightarrow \cot x=-3\Leftrightarrow \cot x=\operatorname{arccot}(-3)\Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}(-3)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\operatorname{arccot}(-3)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

7). $\cos 2x-3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x-2=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ (1). Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $2t^2+3t+1=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-\frac{1}{2}$

So với điều kiện hai nghiệm đều nhận.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

8). $\sin^2 x-\cos x+1=0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0$ (1')

Đặt $\cos x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-2$. So với điều kiện nhận $t=1$. Với $t=1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$