BÀI 3: NHỊ THỨC NIU-TON

1). Công thức nhị thức Niu-ton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \text{ (quy ước } a^0 = b^0 = 1) \text{ (*).}$$

2). Nhận xét:

Công thức nhị thức Niu tơn (*) có :

* $(n+1)$ số hạng.
* Số hạng thứ $k+1$ là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
* Các hệ số của nhị thức có tính đối xứng theo tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$.
* Trong mỗi số hạng tổng số mũ của a và b luôn bằng n.

2). Tam giác Pa-xcan

Trên đây ta thấy muốn khai triển $(a+b)^n$ thành đa thức, ta cần biết $n+1$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Các số này có thể tính được bằng cách sử dụng bảng số sau đây :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
……………………………………………………

Bảng số này do nhà toán học Pháp Pa-xcan thiết lập vào năm 1653 và được người ta gọi là tam giác Pa-xcan.

Tam giác Pa-xcan được thiết lập theo quy luật sau :

– Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.

– Nếu biết hàng thứ n $(n \geq 1)$ thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Chú ý:

$x^m.x^n = x^{m+n}$, $\quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $\quad x^m.y^m = (xy)^m$, $\quad \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$,

$\left(x^m\right)^n = \left(x^n\right)^m = x^{m.n}$, $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ (với điều kiện x, y đều có nghĩa trong tất cả các công thức trên).

CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: TÌM HỆ SỐ CỦA SỐ HẠNG CHỨA x^k TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NIUTƠN

PHƯƠNG PHÁP:

- Sử dụng công thức tính số hạng tổng quát: $\left(a+b\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}a^{n-k}b^{k}$
- Số hạng thứ $(k+1)$: $T_{k+1}=C_{n}^{k}a^{n-k}b^{k},\left(0\le k\le n,n\in ¢\right)$

Ví dụ 1: Khai triển các nhị thức sau:

a). $\left(x+2y\right)^{5}$ b). $\left(2x-3y\right)^{6}$ c). $\left(2x-\frac{1}{y}\right)^{5}$ d). $\left(\frac{1}{x}+2y\right)^{6}$

LỜI GIẢI

a). $\left(x+2y\right)^{5}=C_5^0x^5+C_5^1x^4.(2y)+C_5^2x^3.(2y)^2+C_5^3x^2.(2y)^3+C_5^4x.(2y)^4+C_5^5(2y)^5$

$=x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+32y^5$.

b). $\left(2x-3y\right)^{6}=\left[2x+(-3y)\right]^{6}=C_6^0\left(2x\right)^6+C_6^1\left(2x\right)^5\left(-3y\right)+C_6^2\left(2x\right)^4\left(-3y\right)^2$

$+C_6^3\left(2x\right)^3\left(-3y\right)^3+C_6^4\left(2x\right)^2\left(-3y\right)^4+C_6^5\left(2x\right)\left(-3y\right)^5+C_6^6\left(-3y\right)^6$

$=64x^6-576x^5y+2160x^4y^2-4320x^3y^3+4860x^2y^4-2916xy^5+729y^6$.

c). $\left(2x-\frac{1}{y}\right)^{5}=\left[2x+\left(-\frac{1}{y}\right)\right]^{5}=C_5^0\left(2x\right)^5+C_5^1\left(2x\right)^4\left(-\frac{1}{y}\right)+C_5^2\left(2x\right)^3\left(-\frac{1}{y}\right)^2$

$+C_5^3\left(2x\right)^2\left(-\frac{1}{y}\right)^3+C_5^4\left(2x\right)\left(-\frac{1}{y}\right)^4+C_5^5\left(-\frac{1}{y}\right)^5$

$=32x^5-\frac{80x^4}{y}+\frac{80x^3}{y^2}-\frac{40x^2}{y^3}+\frac{10x}{y^4}-\frac{1}{y^5}$.

d). $\left(\frac{1}{x}+2y\right)^{6}=C_6^0\left(\frac{1}{x}\right)^6+C_6^1\left(\frac{1}{x}\right)^5\left(2y\right)+C_6^2\left(\frac{1}{x}\right)^4\left(2y\right)^2+C_6^3\left(\frac{1}{x}\right)^3\left(2y\right)^3$

$+C_6^4\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(2y\right)^4+C_6^5\left(\frac{1}{x}\right)\left(2y\right)^5+C_6^6\left(2y\right)^6$

$=\frac{1}{x^6}+\frac{12y}{x^5}+\frac{60y^2}{x^4}+\frac{160y^3}{x^3}+\frac{240y^4}{x^2}+\frac{192y^5}{x}+64y^6$

Ví dụ 2: Tìm số hạng thứ k trong các khai triển nhị thức sau:

1). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $\left(x+2y\right)^{13}$

2). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $\left(x-3y\right)^{11}$

3). Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển $\left(2x-\frac{2}{y}\right)^{15}$

4). Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $\left(2x-3y\right)^{200}$.

5). Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$

6). Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(1+x^2-x^3\right)^{8}$

LỜI GIẢI

1). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $(x+2y)^{13}$

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{13}^k x^{13-k}(2y)^k$. Để có số hạng thứ 6 thì $k+1=6 \Leftrightarrow k=5$. Vậy số hạng thứ 6 trong khai triển là $C_{13}^5 x^8(2y)^5=41184x^8y^5$

2). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $(x-3y)^{11}$

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{11}^k x^{11-k}(-3y)^k$. Để có số hạng thứ 5 thì $k+1=5 \Leftrightarrow k=4$. Vậy số hạng thứ 5 trong khai triển là $C_{11}^4 x^7(-3y)^4=26730x^7y^4$.

3). Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển $\left(2x-\dfrac{2}{y}\right)^{15}$

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{15}^k(2x)^{15-k}\left(-\dfrac{2}{y}\right)^k$. Để có số hạng thứ 8 thì $k+1=8 \Leftrightarrow k=7$.

Vậy số hạng thứ 8 trong khai triển là $C_{15}^7(2x)^8\left(-\dfrac{2}{y}\right)^7=-C_{15}^7 2^{15}.\dfrac{x^8}{y^7}$.

4). Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x-3y)^{200}$.

Ta có $(2x-3y)^{200}=\left[2x+(-3y)\right]^{200}=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k(2x)^{200-k}(-3y)^k=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k 2^{200-k}(-3)^k x^{200-k}y^k$. Để có hệ số của $x^{101}y^{99}$ thì $\begin{cases}200-k=101\\ k=99\end{cases} \Leftrightarrow k=99$ (đúng). Kết luận hệ số của $x^{101}y^{99}$ là $C_{200}^{99}2^{101}(-3)^{99}$.

5). Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$

Ta có $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(2x+3x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\sum_{m=0}^{k}C_k^m(2x)^{k-m}\left(3x^2\right)^m$

$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{m=0}^{k}C_{10}^kC_k^m 2^{k-m}3^m x^{k+m}$. Để có hệ số của x^4 thì $\begin{cases}k+m=4\\ 0\le m\le k\le 10\\ k,m\in ¢\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\ k=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=1\\ k=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=2\\ k=2\end{cases}$. Kết luận hệ số của x^4 là :

$a_4=C_{10}^4C_4^0 2^4 3^0+C_{10}^3C_3^1 2^2 3^1+C_{10}^2C_2^2 2^0 3^2=8085$

6). Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(1+x^2-x^3\right)^8$

Ta có $\left(1+x^2-x^3\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(x^2-x^3\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\sum_{m=0}^{k}C_k^m\left(x^2\right)^{k-m}\left(-x^3\right)^m$

$=\sum_{k=0}^{8}\sum_{m=0}^{k}C_8^kC_k^m(-1)^m x^{2k+m}$. Để có hệ số của x^8 thì $\begin{cases}2k+m=8\\ 0\le m\le k\le 8\\ m,k\in ¢\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\ k=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=2\\ k=3\end{cases}$. Kết luận hệ số của x^8 là : $a_8=C_8^4C_4^0++C_8^3C_3^2=238$

Ví dụ 3: Tìm số hạng không chứa x trong các triển khai sau:

a). $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{15}$ b). $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}$ c). $\left(2x-\frac{2}{x}\right)^{12}$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(x^2\right)^{15-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^kx^{30-2k}.x^{-k}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^kx^{30-3k}$. Để có số hạng không chứa x thì $30-3k=0\Leftrightarrow k=10$. Kết luận hệ số của số hạng không chứ x là C_{15}^{10}.

b). Ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^2\right)^{12-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^kx^{24-2k}x^{-4k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^kx^{24-6k}$. Để có số hạng không chứa x thì $24-6k=0\Leftrightarrow k=4$. Kết luận hệ số của số hạng không chứ x là C_{12}^4.

c). Ta có $\left(2x-\frac{2}{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(2x\right)^{12-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^{12-k}x^{12-k}\left(-2\right)^kx^{-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^{12-k}\left(-2\right)^kx^{12-2k}$. Để có số hạng không chứa x thì $12-2k=0\Leftrightarrow k=6$. Kết luận hệ số của số hạng không chứ x là $C_{12}^62^6(-2)^6=C_{12}^62^{12}$.

Ví dụ 4: Trong khai triển của nhị thức $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ cho biết tổng hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^4.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n=C_n^0\left(x^2\right)^n+C_n^1\left(x^2\right)^{n-1}\left(-\frac{2}{x}\right)+C_n^2\left(x^2\right)^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(-\frac{2}{x}\right)^n$

$=C_n^0x^{2n}-2C_n^1x^{2n-3}+4C_n^2x^{2n-6}+\cdots+C_n^n\left(-\frac{2}{x}\right)^n$

Theo đề bài ta có $C_n^0-2C_n^1+4C_n^2=97\Leftrightarrow 1-2\frac{n!}{(n-1)!}+4\frac{n!}{2!(n-2)!}=97$

$\Leftrightarrow -2\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}+4\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=96\Leftrightarrow -n+n(n-1)=48$

$\Leftrightarrow n^2-2n-48=0\Leftrightarrow n=8\vee n=-6$. Nhận $n=8$.

Vậy $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n=\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(x^2\right)^{8-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{16-2k}\left(-2\right)^kx^{-k}$

$=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(-2\right)^kx^{16-3k}$. Để có hệ số của số hạng chứa x^4 thì $16-3k=4\Rightarrow k=4$.

Kết luận hệ số của số hạng chứa x^4 là $a_4=C_8^4\left(-2\right)^4=1120$.

Ví dụ 5: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức sau thành đa thức $f(x)=\left(2x+1\right)^4+\left(2x+1\right)^5+\left(2x+1\right)^6+\left(2x+1\right)^7$.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(2x+1\right)^n=C_n^0\left(2x\right)^n+C_n^1\left(2x\right)^{n-1}+\ldots+C_n^n$.

Số hạng tổng quát là $a_{k+1}=C_n^k(2x)^{n-k}=2^{n-k}.C_n^k.x^{n-k}$. Ta cần $n-k=5$, tức là $k=n-5$.

Như vậy trong khai triển $(2x+1)^4$ không có x^5.

Hệ số x^5 trong khai triển của:

- nhị thức $(2x+1)^5$ ứng với $k=5-5=0$ là $2^5C_5^0=2^5$,
- nhị thức $(2x+1)^6$ ứng với $k=6-5=1$ là $2^5C_6^1=6.2^5$,
- nhị thức $(2x+1)^7$ ứng với $k=7-5=2$ là $2^5C_7^2=21.2^5$.

Vậy hệ số cần tìm là $2^5+6.2^5+21.2^5=28.2^5=896$.