GIỚI HẠN HÀM SỐ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1). Giới hạn của hàm số tại một điểm:

a). Giới hạn hữu hạn: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó c là hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} c = c$.
- Nếu $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

b). Giới hạn vô cực: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trog tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trog tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x) = -\infty$.

2). Giới hạn của hàm số tại vô cực:

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Nhận xét:

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, có thể chứng minh được rằng: Với mọi số nguyên dương k, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = 0 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k} = 0$$

3). Một số định lí về giới hạn hữu hạn:

Định lí 1: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ (với $L, M \in \mathbb{R}$). Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$
- Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Hệ quả:

- Nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c.f(x)\right] = c.L$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a.x^k\right) = ax_0^k$ (a hằng số và $k\in\mathbb{Z}^+$).

Định lí 2: Giả sử $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Khi đó:

- $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$
- $\lim_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$
- Nếu $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in J\setminus\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L \ge 0$ và $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Chú ý:

Định lí 1 và định lí 2 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Định lí 3: (Định lí kẹp về giới hạn hàm số): giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J\setminus\{x_0\}$. Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi $x \in J\setminus\{x_0\}$ và $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

Chú ý: Định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ (trong các trường hợp này thay tập hợp $J\setminus\{x_0\}$ bằng khoảng $(a;+\infty)$) hoặc $x \to -\infty$ (trong các trường hợp này thay tập hợp $J\setminus\{x_0\}$ bằng khoảng $(-\infty;a)$).

Định lí 4: Nếu $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

4). Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực:

Qui tắc 1: Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ (với $L \ne 0$) thì $\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)]$ được cho bởi bảng sau:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	–	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	–	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L, (L \ne 0)$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)\setminus\{x_0\}$ thì $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được cho bởi bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

5). Các dạng vô định:

Các dạng vô định trường gặp: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$.

6). Giới hạn một bên:

a). Giới hạn hữu hạn:

* Giới hạn bên phải: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết:
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.
* Giới hạn bên trái: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết:
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Định lí 5: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$

* Giới hạn vô cực:
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như các định nghĩa ở phần giới hạn hữu hạn.
Định lí 5 vẫn đúng với giới hạn vô cực.
Các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc tìm giới hạn vô cực vẫn đúng trong trường hợp $x \to x_0^+$ hay $x \to x_0^-$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ BẰNG ĐỊNH NGHĨA:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

a). Để tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ta làm như sau:

* Xét dãy số (x_n) bất kỳ thuộc tập xác định D với $x_n \neq x_0$ mà $\lim x_n = x_0$

*Tìm $\lim f(x_n)$:

- Nếu ta có $\lim f(x_n) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.
- Nếu ta có $\lim f(x_n) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

b). Để tìm $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ta làm như sau :

*Xét dãy số (x_n) bất kỳ thuộc tập xác định mà $\lim x_n = +\infty$.

*Tìm $\lim f(x_n)$:

- Nếu ta có $\lim f(x_n) = L$ thì $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$.
- Nếu ta có $\lim f(x_n) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty$.

Hoàn toàn tương tự khi tính $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

c). Để chứng minh hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to x_0$ ta thường làm như sau :

Chọn hai dãy số (u_n) và (v_n) cùng thuộc tập xác định của hàm số sao cho $u_n \geq x_0, v_n \geq x_0$ và có $\lim u_n = \lim v_n = x_0$.

Chứng minh $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ hoặc một trong hai giới hạn này không tồn tại.

Khi đó theo định nghĩa ta suy ra hàm số không có giới hạn khi $x \to x_0$.

Đối với các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to -\infty, x \to +\infty$ ta cũng làm tương tự.