$\xi 8$ HÀM SỐ LIÊN TỤC

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ THEO CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

1. Hàm số liên tục tại 1 điểm:

Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại x_0.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$.Ta nói rằng hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

Nhận xét:

a). Nếu hai hàm số f và g liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f\pm g, fg, cf$ (c là một hằng số) đều liên tục tại điểm x_0.

b). Hàm đa thức và hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.

3. Tính chất của hàm số liên tục:

Định lí 2 (định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ .Nếu $f(a)\neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a), f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=M$.

Ý nghĩa hình học của định lí

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a), f(b)$ thì đường thẳng $y=M$ cắt đồ thị của hàm số $y=f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c\in(a;b)$.

Hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c\in(a;b)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

DẠNG 1: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP 1:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0.

PHƯƠNG PHÁP 2:

Bước 1: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = -2$

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & x \ne -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Vì $f(-2)$ không xác định, suy ra hàm số không liên tục tại $x = -2$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x-2) = -4 = f(-2)$

Do đó hàm số liên tục tại $x = -2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4} & x \ne \pm 2 \\ -\dfrac{1}{6} & x = 2 \end{cases}$

a). Tính $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b). Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 2; x = -2$.

LỜI GIẢI

a).Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{9-x^2-5}{(x^2-4)(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1}{3+\sqrt{x^2+5}} = -\dfrac{1}{6}$.

b). Từ câu a) suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

hàm số đã cho không xác định tại $x = -2$, do đó hàm số không liên tục tại $x = -2$.

Ví dụ 3 : Xét tính liên tục tại giá trị x_0 của các hàm số sau:

1). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x \ne 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ và tại $x_0 = 4$

2). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x \ne 1 \\ \dfrac{1}{4} & x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} & x \ne 0 \\ \dfrac{1}{4} & x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$ và tại $x = \dfrac{\pi}{3}$

4). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & x \ne 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ và tại $x_0 = 5$

5). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x > 5 \\ (x-5)^2+3 & x \le 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$, tại $x_0 = 6$ và tại $x_0 = 4$

6). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} & x>-1\\ \dfrac{\sqrt{3-x}}{2} & x\le -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

7). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x>1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ x-\dfrac{3}{2} & x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$

LỜI GIẢI

1).

- Xét tính liên tục tại $x_0=2$:

Có $f(x_0)=f(2)=1$

Có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0=4$:

Có $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{4^2-3.4+2}{4-2}=3=f(4)\Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0=4$.

2). Có $f(x_0)=f(1)=\dfrac{1}{4}$ (1)

Có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-4}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

3).

- Xét tính liên tục tại $x_0=0$

Có $f(x_0)=f(0)=\dfrac{1}{4}$

Có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{4}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=0$

- Xét tính liên tục tại $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

Có $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \dfrac{1-\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ suy ra hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

4). • Xét tính liên tục tại $x_0 = 2$

Ta có $f(x) = f(2) = 1$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2+3x-1}{x-1} = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

Ta có $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \dfrac{2-7.5+5.5^2-5^3}{5^2-3.5+2} = f(5) \Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 5$.

5). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x > 5 \\ (x-5)^2+3 & x \le 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$, tại $x_0 = 6$ và tại $x_0 = 4$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

Áp dụng nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ *hàm số liên tục tại* x_0.

Có $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9} = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-10}$

$= \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{(\sqrt{2x-1}+3)}{2} = \dfrac{\sqrt{2.5-1}+3}{2} = 3.$

Có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} \left[(x-5)^2+3\right] = 0+3 = 3 = f(5).$

Vì $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = 5.$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 6$

Có $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \dfrac{6-5}{\sqrt{2.6-1}-3} = \dfrac{1}{\sqrt{11}-3} = f(6)$. Vậy hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 6$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 4$

Có $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \left[(x-5)^2+3\right] = (4-5)^2+3 = 4 = f(4) \Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 4$.

6). Có $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x+3-1}{(\sqrt{2x+3}+1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2(x+1)}{(\sqrt{2x+3}+1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{2.(-1)+3}+1} = 1.$

Có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{\sqrt{3-x}}{2} = \dfrac{\sqrt{3-(-1)}}{2} = 1.$

Có $f(-1) = \dfrac{\sqrt{3-(-1)}}{2} = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = -1$.

7). Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2}$

Có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$.

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x-\frac{3}{2}\right) = 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Vì $f(1) \neq \lim\limits_{x\to -1} f(x) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x_0 = 1$.