

TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG  $\frac{0}{0}$

DẠNG 1:  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  là các đa thức và  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

**Câu 1: Tìm các giới hạn sau:**

a).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$       b).  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$       c).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$

d).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$       e).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$       f).  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

**LỜI GIẢI**

a).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$

b).  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x+5} = \frac{1}{2}$

c).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-1} = 12$

d).  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

Phân tích  $x^3 - 3x + 2$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0

$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$

Phân tích  $x^4 - 4x + 3$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	0	0	-4	3
1	1	1	1	-3	0

$\Rightarrow x^4 - 4x + 3 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)$

Vậy  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3}$  (khi  $x \rightarrow 1$  thì ta thấy cả tử và mẫu đều dần về 0, có

nghĩa vẫn còn vô định  $\frac{0}{0}$ , nên ta phải phân tích thành nhân tử tiếp).

Phân tích  $x^2 + x - 2$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	1	-2
1	1	2	0

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Phân tích  $x^3 + x^2 + x - 3$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	1	1	-3
1	1	2	3	0

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}$$

$$e). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{4}{3}$$

$$f). \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{4}$$

**Câu 2: Tìm các giới hạn sau :**

$$a). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} \quad b). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} \quad c). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}$$

$$d). \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} \quad e). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} \quad f). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}$$

**LỜI GIẢI**

$$a). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x + 3) = 3$$

$$b). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9x + 27) = 27$$

$$c). L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}$$

Phân tích  $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	2	-5	-2	-3
3	2	1	1	0

$$\Rightarrow 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 = (x-3)(2x^2 + x + 1)$$

Phân tích  $4x^3 - 12x^2 + 4x - 12$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	4	-12	4	-12
3	4	0	4	0

$$\Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12 = (x-3)(4x^2 + 4)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{(x-3)(4x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 + 4} = \frac{2 \cdot 9 + 3 + 1}{4 \cdot 9 + 4} = \frac{11}{20}$$

$$d). \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + (\sqrt{2})^3}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{(x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x + 2)}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$e). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) = 6$$

$$f). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^3 - 27)}{(x-3)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 3x + 9)}{2x+3} = 9$$

**Câu 3: Tìm các giới hạn sau:**

a).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2}$       b).  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$       c).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^2 - 4}$   
 d).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$       e).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4}$       f).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

**LỜI GIẢI**

a).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Phân tích  $x^3 + x^2 - 5x - 2$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	1	-5	-2
2	1	3	1	0

$\Rightarrow x^3 + x^2 - 5x - 2 = (x-2)(x^2 + 3x + 1)$

Vậy  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 3x + 1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x+2} = \frac{11}{4}$

b).  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2 + 4)}{x+4} = -16$

c).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^2 - 4}$

Phân tích  $x^5 - 2x^4 + x - 2$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	-2	0	0	1	-2
2	1	0	0	0	1	0

$\Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 2 = (x-2)(x^4 + 1)$

Vậy  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^4 + 1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 1}{x+2} = \frac{17}{4}$

d).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$

Phân tích  $x^4 - x^3 - x + 1$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	-1	0	-1	1
1	1	0	0	-1	0

$\Rightarrow x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3 - 1)$

Phân tích  $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$  thành nhân tử bằng Hoocner:

	1	-5	7	-3
1	1	-4	3	0

$\Rightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x^2 - 4x + 3)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 - 1)}{(x-1)(x^2 - 4x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+3} = \frac{3}{4}$

e).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4} = \frac{4}{-3}$

$$f). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{\left((\sqrt{x})^2 - 1\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{[(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)]^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

hoc360.net