GIỚI HẠN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng 4: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Câu 1: Tìm các giới hạn sau:

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$ 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x.\sin 3x.\sin x}{45x^3}$ 6). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 5x}{\sin x}$

7). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$ 8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x.\sin x}$ 9). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\sin ax}{1-\cos ax}$

LỜI GIẢI

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{1}{5}$

2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\tan 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\tan\dfrac{x}{2}=0$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x.\sin 3x.\sin x}{45x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}$

6). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 6x\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos 6x=2$

7). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{5x}{2}}{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25}{9}\cdot\left(\dfrac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\dfrac{3x}{2}}{\sin\dfrac{3x}{2}}\right)^2=\dfrac{25}{9}$

(Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3x}{2}}{\sin\dfrac{3x}{2}}=1$)

8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x.\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x.\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x(1+\cos 2x)}{x.\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}2(1+\cos 2x)\dfrac{\sin x}{x}=4$

9). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\sin ax}{1-\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.2\sin\dfrac{ax}{2}\cos\dfrac{ax}{2}}{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin\dfrac{ax}{2}}\cdot\cos\dfrac{ax}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{ax}{2}}{\sin\dfrac{ax}{2}}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{ax}{2}}{\dfrac{a}{2}}$

(Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\frac{ax}{2}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{2}{a}$). Vậy $L=\dfrac{2}{a}$.

Câu 2: Tìm các giới hạn sau:

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x....\sin nx}{n!x^n}$ 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$ $(a\neq 0)$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ 6). $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

7). $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\cos x-\cos b}{x-b}$ 8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin 2x}$ 9). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$

LỜI GIẢI

1). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\dfrac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{b}.\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}.\dfrac{\frac{bx}{2}}{\sin\frac{bx}{2}}\right)$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{bx}{2}}{\sin\frac{bx}{2}}=1$. Vậy $L=\dfrac{a}{b}$

2). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x....\sin nx}{n!x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x....\sin nx}{1.2.3....nx^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdots\dfrac{\sin nx}{nx}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1,\cdots,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{nx}=1$

Vậy $L=1$.

3). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2$ (vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}=1$).

Vậy $L=\dfrac{a^2}{4}$.

4). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^3}=\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}\sin x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{-1}{2\cos x}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2\cos x}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $L=-\dfrac{1}{2}$

5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\cos x.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

6). $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \sin\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \sin a$

7). $\lim\limits_{x\to b} \frac{\cos x - \cos b}{x-b} = \lim\limits_{x\to b} \frac{-2\sin\frac{x+b}{2}\sin\frac{x-b}{2}}{x-b} = \lim\limits_{x\to b}\left(-\sin\frac{x+b}{2}\right).\frac{\sin\frac{x-b}{2}}{\frac{x-b}{2}} = -\sin b$

8). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{2}$

9). $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin a\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.(-2\sin a)$

(Vì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Vậy $L = -2\sin a$