GIỚI HẠN DÃY SỐ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

A). TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1). ĐỊNH NGHĨA:

ĐỊNH NGHĨA 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ hay $\lim(u_n) = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Bằng cách sử dụng các kí hiệu toán học, định nghĩa trên có thể viết như sau: $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\right)$.

Một số giới hạn đặc biệt:

a). Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 $\Leftrightarrow$ dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn là 0.

b). $\lim 0 = 0$.

c). $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0, (k > 0)$.

d). Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

ĐỊNH NGHĨA 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a nếu $\lim(u_n - a) = 0$. Khi đó ta viết $\lim u_n = a$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$. Dãy số có giới hạn là số a hữu hạn gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Nhận xét:

a). $\lim u_n = a \Leftrightarrow |u_n - a|$ nhỏ bao nhiêu cũng được với n đủ lớn.

b). Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

Một số giới hạn đặc biệt:

a). $\lim c = c$ (c là hằng số).

b). Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim |u_n| = |a|$.

c). Nếu $u_n \ge 0, (\forall n)$ thì $a > 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

2). ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN :

Định lí 1 : Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n| < v_n, (\forall n)$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2 :

a). Giả sử $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó ta có :

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}, (b \ne 0)$
- $\lim(c.u_n) = c.a$.

b). Cho ba dãy số $(u_n), (v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$ (gọi định lí kẹp).

c). Điều kiện để một dãy số tăng hoặc dãy số giảm có giới hạn hữu hạn:

Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.

Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

3). TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN:

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $|q|<1$. Khi đó tổng $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ được gọi là tổng vô hạn của cấp số nhân và $S=\lim S_n=\lim\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}$.

4). GIỚI HẠN VÔ CỰC:

a). Dãy số có giới hạn $+\infty$: Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi và chỉ khi với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó. Ta viết $\lim(u_n)=+\infty$ hoặc $\lim u_n=+\infty$ hoặc $u_n\to+\infty$.

Ví dụ: $\lim n=+\infty, \lim\sqrt{n}=+\infty, \lim\sqrt[3]{n}=+\infty, \lim n^\alpha=+\infty, (\alpha>0)$.

b). Dãy số có giới hạn $-\infty$: Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi và chỉ khi với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó. Ta viết $\lim(u_n)=-\infty$ hoặc $\lim u_n=-\infty$ hoặc $u_n\to-\infty$.

Chú ý:

- $\lim u_n=-\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n)=+\infty$.
- Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
- Nếu $\lim|u_n|=+\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n}=0$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh dãy số có giới hạn là 0.

PHƯƠNG PHÁP:

Cách 1: Áp dụng định nghĩa.

Cách 2: Sử dụng các định lí sau:

* Nếu k là số thực dương thì $\lim\frac{1}{n^k}=0$.
* Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n|\le v_n$ với mọi n và $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$.
* Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n=0$.

Ví dụ: Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn là 0.

a). $u_n=\frac{(-1)^n}{4n+5}$ b). $u_n=\frac{\cos 4n}{n+3}$ c). $u_n=\frac{1+\cos n^3}{2n+3}$ d). $u_n=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}$

LỜI GIẢI

a). Với mỗi số dương ε tùy ý, cho trước, ta có $|u_n|=\left|\frac{(-1)^n}{4n+5}\right|=\frac{1}{4n+5}<\varepsilon \Leftrightarrow 4n+5>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-5\right)$. Suy ra với mỗi số dương cho trước, thì với mọi số tự nhiên $n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-5\right)$ ta đều có $|u_n|<\varepsilon$. Vậy $\lim u_n=0$.

b). Ta có $\forall n\in ¥ *$ thì $|\cos 4n|\le 1\Rightarrow |u_n|=\left|\frac{\cos 4n}{n+3}\right|\le\left|\frac{1}{n+3}\right|\le\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$.Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim\frac{1}{n^k}=0$" ta được $\lim\frac{1}{n}=0$. Từ đó suy ra $\lim u_n=0$.

c). Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\left|\cos n^3\right| \le 1 \Rightarrow \left|u_n\right| = \left|\dfrac{1+\cos n^3}{2n+3}\right| \le \left|\dfrac{2}{2n+3}\right| \le \left|\dfrac{2}{2n}\right| = \dfrac{1}{n}$. Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$" ta được $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

d). Ta có $\left|u_n\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right| \le \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1}} < \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $\lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

VẤN ĐỀ 2: Dùng định nghĩa chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn L.

PHƯƠNG PHÁP: Chứng minh $\lim\left|u_n - L\right| = 0$.

Ví dụ: Chứng minh:

a). $u_n = \dfrac{2n+3}{4n+5} = \dfrac{1}{2}$ b). $\lim \dfrac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} = \dfrac{2}{3}$ c). $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = 1$.

LỜI GIẢI

a). gọi $u_n = \dfrac{2n+3}{4n+5}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2n+3}{4n+5} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{8n+10}\right| < \dfrac{1}{n}$.

Vì $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right) = 0$, suy ra $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

b). Gọi $u_n = \dfrac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - \dfrac{2}{3}\right| = \left|\dfrac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} - \dfrac{2}{3}\right| = \left|\dfrac{12.3^n - 15.2^n - 12.3^n - 6.2^n}{3(6.3^n + 3.2^n)}\right|$

$$= \left|\dfrac{-7.2^n}{6.3^n + 3.2^n}\right| = \dfrac{7.2^n}{6.3^n + 3.2^n} < \dfrac{7.2^n}{6.3^n} = \dfrac{7}{6}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n.$$

Vì $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim\left(u_n - \dfrac{2}{3}\right) = 0$. Do đó $\lim u_n = \dfrac{2}{3}$.

c). Gọi $u_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - 1\right| = \left|\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right|$

$$= \left|\dfrac{\left[\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right]\left[\sqrt{n^2+2n} + (n+1)\right]}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right| = \left|\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2 - (n+1)^2}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right|$$

$= \left|\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)} < \dfrac{1}{n}$. Vì $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\left(u_n - 1\right) = 0$. Do đó $\lim u_n = 1$.

VẤN ĐỀ 3: Tìm giới hạn của dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn:

DẠNG 1: u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là hai đa thức của n).

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy $\left(u_n\right)$ biết:

a). $u_n=\dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}$ b). $u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$ c). $u_n=\dfrac{2n^4+3n^2-n}{(2n+1)(1-3n)(2n^2+1)}$

d). $u_n=\dfrac{1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{2n^2+3}$ e). $u_n=\dfrac{(2n-1)^2\left(3-4n^3\right)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$ f). $u_n=\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}$

LỜI GIẢI

a). Ta thấy n^2 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^2 được:

$u_n=\dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}=\dfrac{\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2}}{\dfrac{5n^2+3}{n^2}}=\dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n^2}}$. Ta có $\lim\dfrac{3}{n}=0,\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ và $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$ nên $\lim u_n=\dfrac{2-0+0}{5+0}=\dfrac{2}{5}$.

b). Dễ dàng thấy n^4 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^4 được:

$u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}=\dfrac{\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4}}{\dfrac{n^4+4n^3+n}{n^4}}=\dfrac{-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{4}{n^4}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$. Ta có $\lim\dfrac{2}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n^2}=0,\ \lim\dfrac{4}{n^4}=0$, $\lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$. Do đó $\lim u_n=\dfrac{0+0+0}{1+0+0}=0$.

c). Có $2n^4+3n^2-n=n^4\left(\dfrac{2n^4+3n^2-n}{n^4}\right)=n^4\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)$, $2n+1=n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)=n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$,

$1-3n=n\left(\dfrac{1-3n}{n}\right)=n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)$ và $2n^2+1=n^2\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2}\right)=n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$. Từ đó

$u_n=\dfrac{n^4\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{n^4\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}-3\right)\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}-3\right)\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}$. Vì $\lim\dfrac{3}{n}=0$, $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$, $\lim\dfrac{1}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{2+0-0}{(2+0)(0-3)(2+0)}=-\dfrac{1}{6}$.

d). Bước đầu tiên qui đồng mẫu $u_n=\dfrac{1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{2n^2+3}=\dfrac{n^2-2n+3}{\left(n^2+2n\right)\left(2n^2+3\right)}$.

Ta có $n^2-2n+3=n^2\left(\frac{n^2-2n+3}{n^2}\right)=n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$, $n^2+2n=n^2\left(\frac{n^2+2n}{n^2}\right)=n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)$ và

$2n^2+3=n^2\left(\frac{2n^2+3}{n^2}\right)=n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)$. Từ đó $u_n=\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}$. Vì

$\lim\frac{2}{n}=0,\ \lim\frac{3}{n^2}=0,\ \lim\frac{3}{n^2}=0$ và $\lim\frac{1}{n^2}=0$. Do đó $\lim u_n=0.\frac{1-0+0}{(1+0)(2+0)}=0$.

e). $u_n=\frac{(2n-1)^2\left(3-4n^3\right)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$. Ta có $(2n-1)^2=\left[n\left(\frac{2n-1}{n}\right)\right]^2=n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)^2$, $3-4n^3=n^3\left(\frac{3-4n^3}{n^3}\right)$

$=n^3\left(\frac{3}{n^3}-4\right)$, $(4n+2)^3=\left[n\left(\frac{4n+2}{n}\right)\right]^3=n^3\left(4+\frac{2}{n}\right)^3$ và $(2-n)^2=\left[n\left(\frac{2-n}{n}\right)\right]^2=n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)^2$.

Từ đó $u_n=\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)^2n^3\left(\frac{3}{n^3}-4\right)}{n^3\left(4+\frac{2}{n}\right)^3n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}=\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n^3}-4\right)}{\left(4+\frac{2}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}$, mà $\lim\frac{1}{n}=0,\ \lim\frac{3}{n^3}=0$, $\lim\frac{2}{n}=0$. Do đó

$\lim u_n=\frac{(2-0)^2(0-4)}{(4+0)^3(0-2)^2}=-\frac{1}{16}$.

f). $u_n=\frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}=\frac{\frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2}}{\frac{n^2+2\sqrt{n}-3}{n^2}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n\sqrt{n}}-\frac{3}{n^2}}$. Mà $\lim\frac{2}{\sqrt{n}}=0,\ \lim\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\frac{2}{n\sqrt{n}}=0,$

$\lim\frac{3}{n^2}=0$.