DÃY SỐ

TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1). Dãy số: Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương N* được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là là dãy số). Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số, $u(1)$ được gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), $u(2)$ được gọi là số hạng thứ hai… Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1), u(2)$ …tương ứng bởi $u_1, u_2, \ldots$

2).Người ta thường kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó. Người ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Chú ý: Người ta cũng gọi một hàm số u xác định trên tập hợp gồm m số nguyên dương đầu tiên(m tùy ý thuộc N*) là một dãy số. Rõ ràng, dãy số trong trường hợp này chỉ có hữu hạn số hạng (m số hạng: $u_1, u_2, ..., u_m$). Vì thế, người ta còn gọi nó là dãy số hữu hạn, u_1 gọi là số hạng đầu và u_m gọi là số hạng cuối.

3). Các cách cho một dãy số:

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ: Cho dãy (u_n) với $u_n = 2n^2 - 3n + 2$

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Với $n \geq 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc vài số hạng đứng ngay trước nó).

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

Cách 3: Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) bán kính R. Cho dãy (u_n) với u_n là độ dài cung tròn có số đo là $\frac{2\pi}{n}$ của đường tròn (O).

4). Dãy số tăng: (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n < u_{n+1}.$

5). Dãy số giảm: (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n > u_{n+1}.$

6). Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu . Tính chất tăng, giảm của một dãy số được gọi chung là tính chất đơn điệu của dãy số đó.

7). Dãy số bị chặn trên: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in N^*, u_n \leq M$.

8). Dãy số bị chặn dưới: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in N^*, u_n \geq m$.

9). Dãy số bị chặn: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới. Nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in N^*, m \leq u_n \leq M$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Thiết lập công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n

PHƯƠNG PHÁP:

- Nếu u_n có dạng $u_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ... + a_n$ (kí hiệu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) thì biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n .

• Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số (chẳng hạn tính $u_1, u_2, ...$), từ đó dự đoán công thức tính u_n theo n, rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp. Ngoài ra cũng có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức tính u_n theo n.

VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho dãy số (a_n). Đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Tính u_1, u_2, u_3, u_4 và xác định công thức tính u_n theo n trong các trường hợp sau:

a). $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ b). $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$ c). $a_k = \frac{1}{4k^2-1}$ d). $a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

LỜI GIẢI

a). $u_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$; $u_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.(2+1)} = \frac{2}{3}$

$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{4}$

$u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, do đó:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

b).

$u_1 = a_1 = \frac{1}{1.(1+4)} = \frac{1}{5}$; $u_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2(2+4)} = \frac{17}{60}$

$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \frac{17}{60} + \frac{1}{3(3+4)} = \frac{139}{420}$

$u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \frac{139}{420} + \frac{1}{4.(4+4)} = \frac{1127}{3360}$

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right)$. Do đó

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{4}[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-1}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)]$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

c). $a_k = \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Ví dụ 2: Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau : a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$

$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$

$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2n + 1 \quad \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức $(*)$ đúng.

Với $n = 1; u_1 = 2.1 + 1 = 3$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$. Có nghĩa ta có: $u_k = 2k + 1 \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2(k + 1) + 1 = 2k + 3.$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3.$

Vậy $(*)$ đúng khi $n = k + 1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$u_4 = 2u_3 = 2.8 = 16 = 2^4$

$u_5 = 2u_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Từ các số hạng đầu tiên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 2^n \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh cộng thức $(*)$ đúng.

Với $n = 1$, có: $u_1 = 2^1 = 2$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, có nghĩa ta có: $u_k = 2^k \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2^{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = 2.u_k = 2.2^k = 2^{k+1}.$

Vậy $(*)$ đúng với $n = k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 3: Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.
b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3$.

Từ đó suy ra:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

$u_4 - u_3 = 3^3$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$

$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$u_1 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + ... + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1} = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3$

$\Leftrightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 = \dfrac{(n-1)^2 . n^2}{4}$

Vậy $u_n = 1 + \dfrac{n^2 (n-1)^2}{4}$

b). $u_{100} = 1 + \dfrac{100^2 . 99^2}{4} = 24502501.$