Chứng minh phương trình sau có nghiệm với mọi $m \in ¡$

a). $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$ (1)

b). $(4m+1)x^3-(m+1)x+m=0$ (1)

c). $(m^3-1)(x^{2001}-1)(x+2)^{2002}+2x+3=0$ (1)

d). $\cos x+m\cos 2x=0$

LỜI GIẢI

a). $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$ (1)

Đặt $f(x)=m(x-1)(x+2)+2x+1$.

Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(-2)=m(-2-1)(-2+2)+2(-2)+1=-3$ và có $f(1)=m(1-1)(1+2)+2.1+1=3$. Vì $f(-2).f(1)=-3.3=-9<0$ với mọi m.

Do đó $f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $x_0\in(-2,1)$ với mọi m.

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

b). $(4m+1)x^3-(m+1)x+m=0$ (1)

Đặt $f(x)=(4m+1)x^3-(m+1)x+m$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=m$ và có $f(-1)=(4m+1)(-1)^3-(m+1)(-1)+m=-2m$. Từ đó suy ra $f(-1).f(0)=-2m^2<0\ \ \forall m\neq 0 \Rightarrow f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0\in(-1;0)$

Xét trường hợp: $m=0$

$(4.0+1).x^3-(0+1)x+0=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad \vee x=0$

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

c). $(m^3-1)(x^{2001}-1)(x+2)^{2002}+2x+3=0$ (1)

Đặt $f(x)=(m^3-1)(x^{2001}-1)(x+2)^{2002}+2x+3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $f(-2)=(m^3-1)\left[(-2)^{2001}-1\right](-2+2)^{2002}+2(-2)+3=-1$.

Ta có: $f(1)=(m^3-1)(1^{2001}-1)(1+2)^{20002}+2.1+3=5$

Vì $f(-2)f(1)=-5<0$ với mọi m.

$\Rightarrow$ $f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0\in(-2;1)$ với mọi m.

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

d). $\cos x+m\cos 2x=0 \quad \Leftrightarrow \cos x+m(2\cos^2 x-1)=0$ (1)

Đặt $f(x)=\cos x+m(2\cos^2 x-1)$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Chọn nghiệm, cho $2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$

Ta có: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + m\left(2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + m\left(2\cos^2\frac{3\pi}{4} - 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì $f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow f(x)$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

Chứng minh phương trình sau có ít nhất một nghiệm: a). $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$ b). $x^5 + x - 3 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(-1) = -1 - 5.1 + 7 = 1$ và $f(-2) = -21$, nên suy ra $f(-1)f(-2) = -21 < 0$ với mọi m. Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in (-2;-1)$ với mọi m.

b). Đặt $f(x) = x^5 + x - 3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(1) = -1$ và có $f(2) = 31$, nên suy ra $f(1)f(2) = 31.(-1) = -31 < 0$ với mọi m.

Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $n_0 \in (1;2)$ với mọi m.

Chứng minh các phương trình sau có ít nhất hai nghiệm : a). $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ b). $x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0) = -3$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 2$

Vì $f(-1)f(0) = -12 < 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 1 nghiệm $\in (-1;0)$ (2)

Vì $f(0)f(1) = -6 < 0\ \forall m \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm $\in (0;1)$ (3)

Từ $(2),(3) \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Chứng minh phương trình $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$

Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0) = 0^2.\cos x + 0.\sin 0 + 1 = 1$ và $f(\pi) = \pi^2.\cos\pi + \pi.\sin\pi + 1 = -9$.

Vì $f(0)f(\pi) = -9 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.