PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC
TÓM TẮT GIÁO KHOA

Nguyên lý quy nạp toán học:

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n. Nếu cả hai điều kiện (i) và (ii) dưới đây được thỏa mãn thì $P(n)$ đúng với mọi $n \ge m$ (m là số tự nhiên cho trước).

$(i) P(m)$ đúng.

(ii) Với mỗi số tự nhiên $k \ge m$, nếu $P(k+1)$ đúng.

Phương pháp chứng minh dựa trên nguyên lý quy nạp toán học gọi là phương pháp quy nạp toán học(hay gọi tắt là phương pháp quy nạp).

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ phụ thuộc vào số tự nhiên n đúng với mọi $n \ge m$ (m là số tự nhiên cho trước), ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh rằng $P(n)$ đúng khi $n = m$.

Bước 2: Với k là một số tự nhiên tùy ý, $k \ge m$. Giả sử $P(n)$ đúng khi $n = k$, ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận rằng $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge m$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:

a). $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

b). $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

LỜI GIẢI

a). $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $= 1.4 = 4$; Vế phải của (1) $= 1(1+1)^2 = 4$. Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1).

Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1) = k(k+1)^2$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$

Thật vậy $\underbrace{1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1)}_{=k(k+1)^2} + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4)$

$$= (k+1)(k+2)^2 \text{ (đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi $n = k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $=\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{6}$; Vế phải của (1) $=\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{1}{6}$.

Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1). Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} \quad (2)$$

Thật vậy $\underbrace{\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}_{=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{4(k+1)(k+2)}\left(k(k+3)+\frac{4}{k+3}\right)$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} \text{ (đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 2: Với mỗi số nguyên dương n, gọi $u_n=9^n-1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì u_n luôn chia hết cho 8.

LỜI GIẢI

Ta có $u_1=9^1-1=8$ chia hết cho 8 (đúng).

Giả sử $u_k=9^k-1$ chia hết cho 8.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=9^{k+1}-1$ chia hết cho 8.

Thật vậy, ta có $u_{k+1}=9^{k+1}-1=9.9^k-1=9(9^k-1)+8=9u_k+8$. Vì $9u_k$ và 8 đều chia hết cho 8, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 8.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 8.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$, ta luôn có: $2^{n+1}>2n+3$ (*)

LỜI GIẢI

Với $n=2$ ta có $2^{2+1}>2.2+3 \Leftrightarrow 8>7$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n=2$.

Giả sử với $n=k, k\ge 2$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^{k+1}>2k+3$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$2^{k+2}>2(k+1)+3$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 3 ta được: $2.2^{k+1}>2(2k+3) \Leftrightarrow 2^{k+2}>4k+6>2(k+1)+3$. Vậy

$2^{k+2}>2(k+1)+3$ (đúng).

Do đó theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương $n\ge 3$.