CẤP SỐ NHÂN
TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \ge 2, u_n = u_{n-1}.q$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2). Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là:

$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}\left(k \ge 2\right)$.

Hệ quả: Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì "ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$".

3). Định lý 2: Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \ne 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được tính bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$.

4). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội q. Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$($S_n$ là tổng cuản số hạng đầu tiên của cấp số nhân). Ta có:

- Nếu q=1 thì $S_n = nu_1$.
- Nếu $q \ne 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1: Chứng minh một dãy (u_n) là cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP

- Chứng minh $\forall n \ge 1, u_{n+1} = u_n.q$ trong đó q là một số không đổi.
- Nếu $u_n \ne 0$ với mọi $n \in N^*$ thì ta lập tỉ số $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
  - $*$ T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.
  - $*$ T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

Ví dụ 1: Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}} = -1.5^3 = -125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c). Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16 \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$. Do đó có:

$u_1 = u_3 = u_5 = ... = u_{2n+1}....$ (1)

Và $u_2 = u_4 = u_6 = ... = u_{2n} = ...$ (2)

Theo đề bài có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$ (3)

Từ (1), (2) ,(3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = ... = u_{2n} = u_{2n+1}....$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

LỜI GIẢI

Vì có $v_n = u_n + 3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).

Theo đề $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

DẠNG 2: Xác định số hạng đầu công bội, xác định số hạng thứ k, tính tổng của n số hạng đầu tiên:

PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.

Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng , ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

Ví dụ 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 & (*) \\ u_1q(1+q^4) = 102 & (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 135 \\ u_1.q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 135 \quad (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2) = 40 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q^3(1+q+q^2)}{u_1(1+q+q^2)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1+q+q^2} = \frac{1215}{19}.$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \quad (*) \\ u_1(1+q+q^2) = 43 \quad (**) \end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1q}{u_1(1+q+q^2)} = \frac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q = 6(1+q+q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \frac{1}{6}$

Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36.$

Kết luận $\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$