CẤP SỐ CỘNG

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \ge 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2.Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

1). Định lý 2: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$

2). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có :

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Chứng minh một dãy số (u_n) là cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Ví dụ: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$ b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

LỜI GIẢI

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19.1 - 5 = 14$.

b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) = -3$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$ và số hạng đầu $u_1 = -3.1 + 1 = -2$.

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$, phụ thuộc vào n

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 10(n+1) - \left[(-1)^n + 10n\right] = -(-1)^n + 10 - (-1)^n = 10 - 2(-1)^n$, phụ thuộc vào n. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

DẠNG 2: Tìm số hạng đầu tiên, công sai của cấp số cộng, tìm số hạng thứ k của cấp số cộng, tính tổng k số hạng đầu tiên.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d. Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d.

Muốn tìm số hạng thứ k, trước tiên ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức: $u_k = u_1 + (k-1)d$.

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k\left[2u_1 + (k-1)d\right]}{2}$$

Ví dụ: Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19.4 = 79$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.3 + 19.4) = 820$

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ (1). Ta cũng áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19.3 = 58$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.1 + 19.3) = 590$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$ Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 6(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{5}{2}$, công sai $d = \frac{3}{2}$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19.\frac{3}{2} = 31$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2.\frac{5}{2} + 19.\frac{3}{2}\right) = 335$

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2{}^2 + u_4{}^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 5d + d)^2 + (8 - 5d + 3d)^2 = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 16 \quad (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $20d^2 - 96d + 112 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{14}{5} \ \vee \ d = 2$.

Với $d = \frac{14}{5} \Rightarrow u_1 = -6$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -6 + 19.\frac{14}{5} = \frac{236}{5}$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2.(-6) + 19.\frac{14}{5}\right) = 412$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -2$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -2 + 19.2 = 36$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.(-2) + 19.2) = 340$

DẠNG 3: Dựa vào tính chất của cấp số cộng, chứng minh đẳng thức:

Ví dụ: Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng:

a). $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$

b). $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

c). $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ là cấp số cộng.

LỜI GIẢI

a). Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng: $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$

Ta có: $a^2 - 2ab = a^2 - a(a + c) = -ac \ = -c(2b - c) = c^2 - 2bc$

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

b). Ta có $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc$

$= 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc \ = 4b^2 + 4bc + c^2 \ = (2b + c)^2$.

c). Ta cần chứng minh:

$(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) = 2(a^2 + ac + c^2)$

$\Leftrightarrow 2b^2 + ab + bc = a^2 + 2ac + c^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + b(a + c) = (a + c)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2b^2 = (2b)^2$

$\Leftrightarrow 4b^2 = 4b^2$ (đúng).