Chuyên đề 4

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

2. Khi làm tính trên các phân thức ta chỉ việc thực hiện theo các quy tắc của các phép toán, không cần quan tâm đến giá trị của biến. Nhưng khi giải những bài toán liên quan đến giá trị của phân thức ta phải tìm điều kiện để giá trị của phân thức được xác định, đó là điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 17. Rút gọn biểu thức: $\frac{2}{y}-\left(\frac{x^2}{x^2-xy}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{xy-y^2}\right).\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.

Giải. $\frac{2}{y}-\left(\frac{x^2}{x^2-xy}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{xy-y^2}\right).\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.

$$\frac{2}{y}-\left(\frac{x^2}{x^2-xy}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{xy-y^2}\right).\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{2}{y}-\left[\frac{x^2}{x(x-y)}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{y(x-y)}\right].\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{2}{y}-\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}.\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{2}{y}-\frac{x+y}{xy}=\frac{2x-x-y}{xy}=\frac{x-y}{xy}$$

Ví dụ 18. Rút gọn rồi tính giá tị của biểu thức A với $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}$.

Giải.

ĐKXĐ: $y\neq 0; x\neq \pm y; x\neq 2y; x\neq 3y$.

$$A=\frac{4y^2-(x-y)^2}{y^2(x-y)}.\frac{y(y-x)}{x-3y}+\frac{x(x-2y)-2(x^2-xy)}{2(x-2y)}:\frac{y(x+y)}{2(x-2y)}$$

$$=\frac{(2y+x-y)(2y-x+y)}{y^2(x-y)}.\frac{y(y-x)}{x-3y}+\frac{x^2-2xy-2x^2+2xy}{2(x-2y)}.\frac{2(x-2y)}{y(x+y)}$$

$$=\frac{(x+y)(3y-x).y(x-y)}{y^2(x-y).(3y-x)}+\frac{-x^2.2(x-2y)}{2(x-2y)(x+y)}$$

$$=\frac{(x+y)}{y}-\frac{x^2}{y(x+y)}=\frac{(x+y)^2-x^2}{y(x+y)}=\frac{2xy+y^2}{y(x+y)}=\frac{y(2x+y)}{y(x+y)}=\frac{2x+y}{x+y}$$

Vì $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}$. thỏa mãn ĐKXĐ, khi đó giá trị của biểu thức A là

$$A=\frac{2.(-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{-1+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=4.$$

Ví dụ 19. Cho biểu thức : $B=\frac{1}{x+1}-\frac{x^3-x}{x^2+1}.(\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2-1})$

a) Rút gọn B ;

b) Với giá trị nào của x thì B = 1 ?

Giải. ĐKXĐ : $x\neq\pm 1$.

a) $B=\frac{1}{x+1}-\frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1}.\frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{-2x}{(x^2+1)(x+1)}$

$$=\frac{x^2+1+2x}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{x+1}{x^2+1}.$$

b) $B = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = x^2+1 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy khi x = 0 thì B = 1.

Ví dụ 20. Cho biểu thức $P = [(x^3 - 8) : \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4}.\dfrac{x^3 - 8}{x + 2}] : (x - 1)$

a) Rút gọn P;

b) Tìm $x \in Z$ để P có giá trị nguyên.

Giải. a) ĐKXĐ: $x \neq -2$; $x \neq 1$.

$= [\dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4).(x + 2)}{x^2 + 2x + 4} - \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x^2 + 2x + 4}.\dfrac{(x -2)(x^2 + 2x + 4)}{x + 2}].\dfrac{1}{x-1}$

$= [(xP^2 - 4) - (x - 2)^2].\dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{x^2 -4 - x^2 + 4x - 4}{x - 1} = \dfrac{4x - 8}{x - 1}.$

b) $P = \dfrac{4x - 4 - 4}{x - 1} = \dfrac{4(x - 1)}{x - 1} - \dfrac{4}{x - 1} = 4 - \dfrac{4}{x - 1}.$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{4}{x-1}$ có giá trị nguyên

$\Leftrightarrow x - 1 \in Ư(4) = \{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4\}$

x - 1	-1	1	2	-2	4	-4
x	0	2	3	-1	5	-3

Vậy khi $x \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$ thì P có giá trị nguyên.

Ví dụ 21. Cho biểu thức $Q = [\dfrac{1 - (x^2 + y^2)}{2xy} + 1](1 + \dfrac{1}{x - y}):(1 - \dfrac{1}{x - y})$

a) Rút gọn Q ;