

Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích

Phương pháp:

Để tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$, ta phân tích

$$f(x) = k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x) + \dots + k_n \cdot f_n(x)$$

Trong đó: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ có trong bảng nguyên hàm hoặc ta dễ dàng tìm được nguyên hàm

$$\text{Khi đó: } \int f(x)dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx + \dots + k_n \int f_n(x)dx .$$

Ví dụ 1.1.5 Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{2x^2 + x + 1}{x-1} dx$$

$$J = \int \frac{x^3 - 1}{x+1} dx$$

$$K = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 dx$$

Lời giải.

1. Ta có: $\frac{2x^2 + x + 1}{x-1} = 2x + 3 + \frac{4}{x-1}$

Suy ra $I = \int \left(2x + 3 + \frac{4}{x-1}\right) dx = x^2 + 3x + 4\ln|x-1| + C$

2. Ta có: $\frac{x^3 - 1}{x+1} = \frac{x^3 + 1 - 2}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}$

Suy ra $J = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x+1| + C$

3. Ta có: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$

Suy ra $K = \int \left(x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 3\ln|x| + \frac{1}{2x^2} + C .$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

“ Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = F(u(x)) + C$ ”.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích

$f(x) = g(u(x))u'(x)dx$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$

$\Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó: $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$

Ví dụ 1.2.5 Tìm nguyên hàm:

$$I = \int (x+1)\sqrt[3]{3-2x}dx$$

$$J = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+2}}$$

$$K = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5x+3}}$$

Lời giải.

1. Đặt $t = \sqrt[3]{3-2x} \Rightarrow x = \frac{3-t^3}{2} \Rightarrow dx = -\frac{3}{2}t^2 dt$

$$\Rightarrow I = -\frac{3}{2} \int \left(\frac{3-t^3}{2} + 1 \right) t \cdot t^2 dt = -\frac{3}{4} \int (5t^3 - t^6) dt$$

$$= -\frac{3}{4} \left(\frac{5t^4}{4} - \frac{t^7}{7} \right) + C = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt[3]{(3-2x)^7}}{7} - \frac{5\sqrt[3]{(3-2x)^4}}{4} \right) + C$$

2. Đặt $t = \sqrt[3]{2x+2} \Rightarrow x = \frac{t^3-2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}t^2 dt$

$$\text{Suy ra } J = \int \frac{\frac{t^3-2}{2} \cdot \frac{3}{2}t^2 dt}{t} = \frac{3}{4} \int (t^4 - 2t) dt = \frac{3}{4} \left(\frac{t^5}{5} - t^2 \right) + C$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt[3]{(2x+2)^5}}{5} - \sqrt{(2x+2)^2} \right) + C.$$

3. Ta có: $I = \int \frac{x(\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3})dx}{5x+3-x-3} = \frac{1}{4} \int (\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3})dx$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} \sqrt{(5x+3)^3} - \sqrt{(x+3)^3} \right) + C.$$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutihocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Phương pháp:

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó :

$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý: $dv = v'(x) dx$).

Tính $v = \int dv$ và $du = u'.dx$.

Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ để tính hơn $\int u dv$.

Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1 : $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Với dạng này, ta đặt $u = P(x)$, $dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$.

Dạng 2 : $I = \int (x) e^{ax+b} dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3 : $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Dạng 4 : $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int v du$ ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

Ví dụ 1.3.5 Tìm nguyên hàm: $I = \int \sin x \cdot \ln(\cos x) dx$

$$J = \int x \ln \frac{x-1}{x+1} dx$$

Lời giải.

1. Đặt $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ ta chọn $\begin{cases} du = \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra $I = -\cos x \ln(\cos x) + \int \sin x dx = -\cos x \ln(\cos x) - \cos x + C$

2. Đặt $\begin{cases} u = \ln \frac{x-1}{x+1} \\ dv = x dx \end{cases}$ ta chọn $\begin{cases} du = \frac{2}{(x+1)^2} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

Suy ra $I = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{x-1}{x+1} + \int \frac{x^2}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{x-1}{x+1} + \int \left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{x-1}{x+1} + x - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$$

Ví dụ 2.3.5 Tìm nguyên hàm: $I = \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx$

Lời giải.

Cách 1 : Dùng từng phần, bạn đọc làm tương tự trên.

Cách 2 : Ta có : $\sin 2x \cdot e^{3x} = \frac{1}{3} [\sin 2x (e^{3x})' + (\sin 2x)' \cdot e^{3x}] - \frac{2}{3} \cos 2x e^{3x}$

$$= \frac{1}{3} (\sin 2x \cdot e^{3x})' - \frac{2}{9} [\cos 2x \cdot (e^{3x})' + (\cos 2x)' \cdot e^{3x}] - \frac{4}{9} \sin 2x \cdot e^{3x}$$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

$$\Rightarrow \frac{13}{9} \sin 2x \cdot e^{3x} = \frac{1}{3} (\sin 2x \cdot e^{3x})' - \frac{2}{9} (\cos 2x \cdot e^{3x})' = \left(\frac{1}{3} \sin 2x \cdot e^{3x} - \frac{2}{9} \cos 2x \cdot e^{3x} \right)'$$

$$\text{Suy ra : } \sin 2x e^{3x} dx = \left(\frac{3}{13} \sin 2x e^{3x} - \frac{2}{13} \cos 2x e^{3x} \right)'$$

$$I = \frac{1}{13} e^{3x} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$$

Cách 3 : Ta giả sử : $\int \sin 2x \cdot e^{3x} dx = a \cdot \sin 2x \cdot e^{3x} + b \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} + C$

Lấy đạo hàm hai vế ta có :

$$\sin 2x \cdot e^{3x} = a(2 \cos 2x \cdot e^{3x} + 3 \sin 2x \cdot e^{3x}) + b(3 \cos 2x \cdot e^{3x} - 2 \sin 2x \cdot e^{3x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{13}, b = -\frac{2}{13}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{13} e^{3x} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định, liên tục trên \mathbb{R} . Hỏi khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x)$

B. $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x)$

C. $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x)$

D. $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx \int g(x)$

Câu 2. Tính $\int 1 dx$, kết quả là

A. $x + C$

B. C

C. x

D. dx

Câu 3. Hàm số $F(x) = \ln|x|$ là nguyên hàm của hàm số nào

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $f(x) = \frac{1}{x}$

B. $f(x) = x$

C. $f(x) = \frac{x^2}{2}$

D. $f(x) = |x|$

Câu 4. Công thức nào là đúng

A. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$

B. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha-1} x^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq 1$

C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha-1} + C \quad \alpha \neq -1$

D. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + C \quad \alpha \neq 1$

Câu 5. Tính $\int 5dx$, kết quả là

A. $5x + C$

B. $5 + C$

C. $5 + x + C$

D. $x + C$

Câu 6. $\int \sin 5x - 1 dx$, kết quả là

A. $-\frac{1}{5} \cos x - 1 + C$

B. $\frac{1}{5} \cos x - 1 + C$

C. $5 \cos x - 1 + C$

D. $-5 \cos x - 1 + C$

Câu 7. Công thức nào là đúng

A. $\int \frac{1}{\cos^2 x + 1} dx = \tan x + 1 + C$

B. $\int \frac{1}{\cos^2 x + 1} dx = -\tan x + 1 + C$

C. $\int \frac{1}{\cos^2 x + 1} dx = \tan x + 1$

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x + 1} dx = \cot x + 1 + C$

Câu 8. Điền vào chỗ ... để được đẳng thức đúng

$$e^x x - 1 + C = \int \dots dx$$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutiuehocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $x e^x$

B. e^x

C. $x - 1 e^x$

D. $x + 1 e^x$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 2x$ là

A. $x^2 + C$

B. x^2

C. $\frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^2}{2}$

Câu 10. Tính $\int (x+1)^2 dx$, kết quả là:

A. $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

B. $x^3 + x^2 + x + C$

C. $\frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$

D. $\frac{x^3}{3} + x^2 + x$

Câu 11. Kết quả của phép tính $\int \sin x \cdot \cos^2 x dx$ là

A. $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

B. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

C. $-\cos x - \frac{1}{4} \cos^4 x + C$

D. $-\frac{1}{3} \cos^3 x$

Câu 12. Kết quả của $I = \int x \sqrt{x^2 + 7} dx$ là

A. $\frac{1}{32} \sqrt{x^2 + 7} + C$

B. $\frac{1}{32} x^2 + 7 + C$

C. $\frac{1}{16} \sqrt{x^2 + 7} + C$

D. $\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 7} + C$

Câu 13. Kết quả $I = \int x \ln x dx$ là

A. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

B. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$

C. $x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C$

D. $x \ln x + \frac{1}{2} x + C$

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là:

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutihocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$ B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$ C. $x^3 - 3x^2 + \ln x + C$ D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$

Câu 15: Họ nguyên hàm của $f(x) = x^2 - 2x + 1$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2 + x + C$

B. $F(x) = 2x - 2 + C$

C. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$

D. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$

Câu 16: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ là :

A. $\ln x - \ln x^2 + C$

B. $\ln x - \frac{1}{x} + C$

C. $\ln|x| + \frac{1}{x} + C$

D. Kết quả khác

Câu 17: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} - e^x$ là:

A. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$

B. $2e^{2x} - e^x + C$

C. $e^x(e^x - x) + C$

D. Kết quả khác

Câu 18: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$ là:

A. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$

B. $-\frac{1}{3}\sin 3x + C$

C. $-\sin 3x + C$

D. $-3\sin 3x + C$

Câu 19: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$ là:

A. $2e^x + \tan x + C$

B. $e^x(2x - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})$

C. $e^x + \tan x + C$

D. Kết quả khác

Câu 20: Tính $\int \sin(3x-1)dx$, kết quả là:

A. $-\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$

B. $\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$

C. $-\cos(3x-1) + C$

D. Kết quả khác

Câu 21. : Tìm $\int (\cos 6x - \cos 4x)dx$ là:

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutiueuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $-\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$

B. $6\sin 6x - 5\sin 4x + C$

C. $\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{4}\sin 4x + C$

D. $-6\sin 6x + \sin 4x + C$

Câu 22: Tính nguyên hàm $\int \frac{1}{2x+1} dx$ ta được kết quả sau:

A. $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

B. $-\ln|2x+1| + C$

C. $-\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

D. $\ln|2x+1| + C$

Câu 23: Tính nguyên hàm $\int \frac{1}{1-2x} dx$ ta được kết quả sau:

A. $\ln|1-2x| + C$

B. $-2\ln|1-2x| + C$

C. $-\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$

D. $\frac{2}{(1-2x)^2} + C$

Câu 24: Công thức nguyên hàm nào sau đây **không đúng**?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)

C. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

Câu 25: Tính $\int (3\cos x - 3^x) dx$, kết quả là:

A. $3\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

B. $-3\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

C. $3\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

D. $-3\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Câu 26: Trong các hàm số sau:

(I) $f(x) = \tan^2 x + 2$

(II) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$

(III) $f(x) = \tan^2 x + 1$

Hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$

A. (I), (II), (III)

B. Chỉ (II), (III)

C. Chỉ (III)

D. Chỉ (II)

Câu 28: Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutienvhocvathcs/>