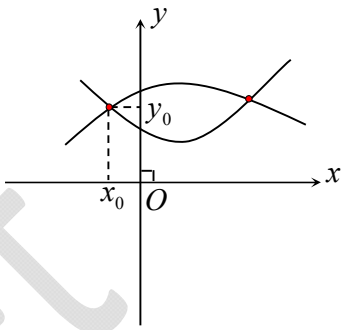
BÀI 5. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $(d): y = g(x)$.



Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $(d): f(x) = g(x)$ (1).

Khi đó:

- Số giao điểm của (C) và (d) bằng với số nghiệm của phương trình (1).
- Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.
- Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) và (d).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Xét hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (C) và hàm số bậc nhất: $y = kx + n$ có đồ thị (d).

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $(d): ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc ba nên có ít nhất một nghiệm. Ta có 2 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Phương trình (1) có *"nghiệm đẹp"* x_0.

Thường thì đề hay cho nghiệm $x_0 = 0; \pm 1; \pm 2; ...$ thì khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Khi đó:

+ (C) và (d) có ba giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm x_0.(**Đây là trường hợp thường gặp**)

+ (C) và (d) có hai giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm x_0 hoặc phương trình (2) có nghiệm kép khác x_0.

+ (C) và (d) có một giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm kép là x_0.

- **Trường hợp 2:** Phương trình (1) không thể nhẩm được *"nghiệm đẹp"* thì ta biến đổi phương trình (1) sao cho ẩn x tất cả nằm bên vế trái, chuyển tất cả tham số m nằm bên vế phải

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = g(m)$$

Ta khảo sát và vẽ bảng biến thiên hàm số vế trái: $y = f(x)$ và biện luận số giao điểm của (C) và (d) theo tham số m.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Vậy có ba giao điểm $A(0;1), B(1;1), C(2;1)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x+2)\left[mx^2 - (2m+1)x + 4m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 12m + 2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq -\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \end{cases}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$2x^3-3mx^2+(m-1)x+1=-x+1 \Leftrightarrow x(2x^2-3mx+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-3mx+m=0(*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9m^2-8m>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>\dfrac{8}{9}$

Vậy $m<0$ hoặc $m>\dfrac{8}{9}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3+mx+2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số với trục hoành: $x^3+mx+2=0$

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Do đó, phương trình tương đương

$$m=-x^2-\frac{2}{x} \qquad (x\neq 0)$$

Xét hàm số: $f(x)=-x^2-\dfrac{2}{x};\ \forall x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=-2x+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{-2x^3+2}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m>-3$. Vậy $m>-3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

$$x^3-3x^2-9x+m=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2-9x=-m \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C_1): y=x^3-3x^2-9x$ và đường thẳng $(d): y=-m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và (d).

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-3x^2-9x$.

Tập xác định $D=R$.

Đạo hàm $y'=3x^2-6x-9;\ y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -27<-m<5 \Leftrightarrow -5<m<27$.

Ví dụ 6: Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k $(k\in\mathbb{R})$. Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+4$ (C) tại ba điểm phân biệt $A,\ B,\ C$ và tam giác OBC có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

Lời giải

Đường thẳng (d) đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc k nên có dạng: $y=k(x+1) \Leftrightarrow kx-y+k=0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3-3x^2+4=kx+k \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-4x+4-k\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ g(x)=x^2-4x+4-k=0\ (*) \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ k\neq 9 \end{cases}$$

Khi đó $g(x)=0 \Leftrightarrow x=2-\sqrt{k}; x=2+\sqrt{k}$

Các giao điểm là $A(-1;0), B\left(2-\sqrt{k};3k-k\sqrt{k}\right), C\left(2+\sqrt{k};3k+k\sqrt{k}\right)$.

Tính được: $BC=2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}$, $d(O,BC)=d(O,d)=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

Khi đó: $S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2}=1\Leftrightarrow |k|\sqrt{k}=1\Leftrightarrow k^3=1\Leftrightarrow k=1$. Vậy $k=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

II. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng $y=k$ có đồ thị $\left(d\right)$.

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và $\left(d\right): ax^4+bx^2+c=k \quad (1)$

  Đặt $t=x^2\left(t\geq 0\right)$ ta có phương trình: $at^2+bt+c-k=0 \quad (2)$

+ $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$ có bốn giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\leftrightarrow$ phương trình (2) thỏa $\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$. ***(Trường hợp này thường gặp)***

+ $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$ có ba giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $x=0$.

+ $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$ có hai giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

+ $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$ không có giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.

+ $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$ có một giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $x=0$ và một nghiệm âm .

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y=x^4+2x^2-3$ và trục hoành.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4+2x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=-3\left(loai\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 1$

Vậy có hai giao điểm: $A\left(-1;0\right)$, $B\left(1;0\right)$.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $x^4-2x^2-m+3=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình: $x^4-2x^2-m+3=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+3=m \quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y=x^4-2x^2+3$ và đường thẳng $(d): y=m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và (d).

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

Tập xác định $D=R$.

Đạo hàm $y'=4x^3-4x;\ y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	3	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2<m<3$. Vậy $2<m<3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m-2\ (C_m)$. Định m để đồ thị ($C_m$) cắt đường thẳng $y=-2$ tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d):

$x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m-2=-2 \Leftrightarrow x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m=0(1)$. Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$.

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-2(m+1)t+m^2-3m=0(2)$.

(C_m) và (d) có bốn giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m+1>0 \\ m^2-3m>0 \\ 2(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{5} \\ m<0, m>3 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{5} < m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{5} < m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m(C)$. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $(d): y = -1$ là

$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0$.

Đặt $t = x^2\ (t \ge 0)$, ta có phương trình: $t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3m+1 \end{array}\right.$ khi đó:

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3m+1 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < m < 1$ và $m \ne 0$. Vậy $-\dfrac{1}{3} < m < 1$ và $m \ne 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = x^2\ (t \ge 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0 \qquad (2)$

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ P = m^2 > 0 \\ S = 3m + 4 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \vee m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \\ m > -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2$. Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là $x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow$ $-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ (3)

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 4 & (4) \\ t_1 t_2 = m^2 & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta suy ra được $\begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_2 = \dfrac{9(3m+4)}{10} \end{cases} (6)$.

Thay (6) vào (5) ta được: $\dfrac{9}{100}(3m+4)^2 = m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m+4) = 10m \\ 3(3m+4) = -10m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$ (thỏa (*))

Vậy giá trị m cần tìm là $\left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$.

III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = kx + n$ có đồ thị (d).

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{ax+b}{cx+d} = kx + n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1) \\ x \neq -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

(C) và (d) có hai giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y=\frac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $y=x+2$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{2x-1}=x+2 \qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq\frac{1}{2}$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2)\Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ x=1\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $(1;3)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1}=-x+m \qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq 1$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 2x-1=(-x+m)(x-1)$

$$\Leftrightarrow x^2-(m-1)x+m-1=0 \qquad (2)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=\left[-(m-1)\right]^2-4(m-1)>0 \\ 1-(m-1).1+m-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2-6m+5>0\Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>5$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m<1$ hoặc $m>5$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\frac{mx-1}{x+2}$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $(d): y=2x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{mx-1}{x+2}=2x-1 \qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq -2$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow mx-1=(2x-1)(x+2) \Leftrightarrow 2x^2-(m-3)x-1=0 \qquad (2)$

(d) cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=\left[-(m-3)\right]^2+8>0\\ 8+2m-6-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\neq -\frac{1}{2}$ (*)

Đặt $A(x_1;2x_1-1);B(x_2;2x_2-1)$ với x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{m-3}{2}\\ x_1x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Khi đó: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=10$

$\Leftrightarrow \left(\frac{m-3}{2}\right)^2+2=2 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa (*))

Vậy giá trị m cần tìm là $m=3$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $(d): y=-2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho tam giác OAB có diện tích là $\sqrt{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{2x+1}{x+1}=-2x+m \Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(-2x+m)$ (điều kiện: $x\neq -1$)

$\Leftrightarrow 2x^2+(4-m)x+1-m=0(1)$ (điều kiện: $x\neq -1$).

(d) cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2+8>0\ \ \forall m\\ 2.(-1)^2+(4-m)(-1)+1-m\neq 0\end{cases}$. Suy ra (d) luôn cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$, trong đó $y_1=-2x_1+m;\ y_2=-2x_2+m$ và x_1,x_2 là các nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{m-4}{2}\\ x_1x_2=\frac{1-m}{2}\end{cases}$.

Tính được:

$$d(O,AB)=\frac{|m|}{\sqrt{5}};AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1+x_2)^2-20x_1x_2}=\frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$$

$S_{OAB}=\frac{1}{2}AB.d(O,AB)=\frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4}=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=\pm 2$. Vậy $m=\pm 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $(d): y=kx+2k+1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho khoảng các từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1\Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(kx+2k+1)$ (điều kiện: $x\neq -1$)

$\Leftrightarrow kx^2+(3k-1)x+2k=0(1)$. (điều kiện: $x\neq -1$)

(d) cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(-1)^2 + (3k-1)(-1) + 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2}, k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1), B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1). Theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-3k+1}{k} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}.$$

Tính được:

$$d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \text{ (loại)} \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Vậy $k = -3$ thỏa yêu câu bài toán.