

VẤN ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.

Phương trình mũ cơ bản: $a^x = m$ với $0 < a \neq 1$.

- + Nếu $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- + Nếu $m > 0$ thì $a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$.

Ví dụ mở đầu: Giải các phương trình sau:

- a) $10^x = 1$. b) $2^x = 8$. c) $4^x = -4$. d) $e^x = 5$. e) $3^x = 2$.
- f) $3^x = \frac{1}{27}$. g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 9$. h) $5^{x^2-5x+1} = 1$. i) $5^{\frac{1}{2^x}} = 1$.

Lời giải:

- a) $10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 = 0$.
- b) $2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 = 3$.
- c) $4^x = -4$ vô nghiệm, vì $4^x > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
- d) $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$.
- e) $3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.
- f) $3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = \log_3 \left(\frac{1}{27}\right) \Leftrightarrow x = \log_3 3^{-3} = -3$.
- g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 9 \Leftrightarrow x = -\log_2 9 \Leftrightarrow x = -2\log_2 3$.
- h) $5^{x^2-5x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = \log_5 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
- i) $5^{\frac{1}{2^x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} = \log_5 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ vô nghiệm, vì $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập trắc nghiệm: PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

Câu 1. Phương trình $5^{2x-1} = 1$ có nghiệm là

- A. $x = 1$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = \frac{1}{3}$. D. $x = 0$.

Câu 2. Giải phương trình $3^{x-1} = 4$. Ta có tập nghiệm bằng

- A. $\{1 - \log_4 3\}$. B. $\{1 - \log_3 4\}$. C. $\{1 + \log_4 3\}$. D. $\{1 + \log_3 4\}$.
- Câu 3.** Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$ là
A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 4.** Nghiệm của phương trình $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 21$ là
A. $x = \log_2 7$. B. $x = 16$. C. $x = \log_2 3$. D. $x = 3$.
- Câu 5.** Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-5x+6} = 1$ là
A. 2. B. 0. C. 4. D. 6.
- Câu 6.** Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $7^{x^2-5x+9} = 343$. Tổng $x_1 + x_2$ bằng
A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.
- Câu 7.** Nghiệm của phương trình $3^{x-2} \cdot 5^{x-1} \cdot 7^x = 245$ là
A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 5$. D. $x = 3$.
- Câu 8.** Để phương trình $3^{-|x|} = m$ có hai nghiệm phân biệt thì m phải thỏa mãn
A. $0 < m < 1$. B. $m \neq 0$. C. $m > 1$. D. $m < 0$.
- Câu 9.** Tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{2x-1} + m^2 - m = 0$ có nghiệm là
A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$.
- Câu 10.** Xác định m để phương trình $3^{2x-1} + 2m^2 - m - 3 = 0$ có nghiệm.
A. $m \in (0; 1)$. B. $m \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. D. $m \in (0; +\infty)$.

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

1. Phương pháp

Loại 1: Cơ số a là hằng số thỏa mãn: $0 < a \neq 1$

$$+ a^{f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = b.$$

$$+ a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Loại 2: Cơ số a có chứa ẩn:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11. Nghiệm của phương trình $x^{\log 4} + 4^{\log x} = 32$ là

- A. $x = 100$. B. $x = 10$; $x = 100$. C. $x = 10$. D. $x = 20$; $x = 100$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $3^{x-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ là

- A. $x = \frac{1}{3}$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{6}{7}$. D. $x = \frac{7}{6}$.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{14}{5}$. D. $x = \frac{7}{5}$.

Câu 14. Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$ bằng

- A. $\{1\}$. B. $\{4\}$. C. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. D. $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$.

Câu 15. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $5^{x+1} - 5^x = 2 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x$ là

- A. $x = \log_{\frac{5}{2}} 4$. B. $x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{8}{3}$. C. $x = 1$. D. $x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{3}$.

Câu 17. Phương trình $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ có nghiệm là

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Câu 18. Phương trình $7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 \cdot 5^{\lg x-1} - 13 \cdot 7^{\lg x-1}$ có nghiệm là

- A. $x = 100$. B. $x = 1$. C. $x = 10$. D. $x = \frac{1}{10}$.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25 \cdot (\sqrt{2})^{7x}$ là

- A. $x = -1$; $x = \frac{2}{7}$. B. $x = -1$, $x = -\frac{2}{7}$. C. $x = 1$, $x = -\frac{2}{7}$. D. $x = 1$, $x = \frac{2}{7}$.

Câu 20. Nghiệm của phương trình $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 5$. **C. $x = 6$.** D. $x = 7$.

Câu 21. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$ là

- A. $x = 2$. **B. $x = 3$.** C. $x = 1$. D. $x = 4$.

Câu 22. Tích hai nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{3} \cdot 243^{\frac{2x+3}{x+8}} = \frac{1}{9} \cdot 9^{\frac{x+8}{x+2}}$ là

- A. $-\frac{102}{41}$. B. $-\frac{186}{41}$. **C. $-\frac{248}{41}$.** D. $-\frac{62}{41}$.

Câu 23. Cho các phương trình: (I): $3^{x+2} + 3^{x-2} = 0$; (II): $3^{x^2+1} = \sqrt[3]{6}$; (III): $5^{x-2} = 2^{2-x}$.

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. (I) và (II) đều vô nghiệm và (III) có nghiệm duy nhất.**
B. (I) và (III) đều vô nghiệm và (II) có nghiệm duy nhất.
C. (II) và (III) đều vô nghiệm và (I) có nghiệm duy nhất.
D. Cả 3 phương trình (I), (II), (III) đều vô nghiệm.

Câu 24. Giải phương trình $(x+2)^{x^2-x-5} = (x+2)^{x+10}$, ta được tập nghiệm là

- A. $\{-1; -5; 3\}$. **B. $\{-1; 5\}$.** C. $\{-1; 3\}$. D. $\{-1; -3; 5\}$.

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HÓA

1. Phương pháp

Với phương trình không cùng cơ số dạng: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ (a, b dương, khác 1 và nguyên tố cùng nhau).

Lấy lôgarit cơ số a (hoặc b) cho hai vế, ta được:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a [a^{f(x)}] = \log_a [b^{g(x)}] \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$$

Chú ý:

- Một số phương trình ta nên rút gọn trước khi lấy lôgarit cả 2 vế.
- Phương trình có cơ số khác nhau nhưng số mũ bằng nhau:

$$m \cdot a^{f(x)} = n \cdot b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \frac{n}{m} \quad (\text{vì } b^{f(x)} > 0) \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{a}{b}} \frac{n}{m}$$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 25. Giải phương trình $3^{4^x} = 4^{3^x}$, ta có tập nghiệm là

- A. $\left\{ \log_{\frac{3}{4}} (\log_3 4) \right\}$. B. $\left\{ \log_{\frac{2}{3}} (\log_3 2) \right\}$ C. $\left\{ \log_{\frac{4}{3}} (\log_4 3) \right\}$ D. $\left\{ \log_{\frac{4}{3}} (\log_3 4) \right\}$.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 15$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 2; x = -\log_3 5$.
C. $x = 4$. D. $x = 3; x = \log_3 5$.

Câu 27. Phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 15$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a và b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Khi đó $a + 2b$ bằng

- A. 13. B. 8. C. 3. D. 5.

Câu 28. Nghiệm của phương trình $9 \cdot x^{\log_9 x} = x^2$ là

- A. $x = 12$. B. $x = 9$. C. $x = 6$. D. $x = 3$.

Câu 29. Nghiệm của $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ cũng là nghiệm của phương trình

- A. $2x^2 + x - 3 = 0$. B. $2x^2 - 5x + 3 = 0$. C. $3x^2 - 5x + 2 = 0$. D. $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Câu 30. Giải phương trình $2^{x^2-2x} = 3$, ta có tập nghiệm bằng

- A. $\left\{ 1 + \sqrt{1 + \log_2 3}; 1 - \sqrt{1 + \log_2 3} \right\}$. B. $\left\{ -1 + \sqrt{1 + \log_2 3}; -1 - \sqrt{1 + \log_2 3} \right\}$.
C. $\left\{ 1 + \sqrt{1 - \log_2 3}; 1 - \sqrt{1 - \log_2 3} \right\}$. D. $\left\{ -1 + \sqrt{1 - \log_2 3}; -1 - \sqrt{1 - \log_2 3} \right\}$.

Câu 31. Giải phương trình $2^{x^2-1} = 5^{x+1}$, ta có tập nghiệm bằng

- A. $\{1; 1 - \log_2 5\}$. B. $\{-1; 1 + \log_2 5\}$. C. $\{-1; 1 - \log_2 5\}$. D. $\{1; -1 + \log_2 5\}$.

Câu 32. Cho phương trình $x^{\log x} = 1000x^2$. Tích các nghiệm của phương trình là bao nhiêu?

- A. 10. B. 1. C. 100. D. 1000.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Loại 1: Phương trình dạng $P(a^{f(x)}) = 0$

1. Phương pháp

- + Đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện $t > 0$.
- + Phương trình đã cho trở thành: $P(t) = 0$.