

§3 LÔGARIT



Định nghĩa
Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$. Nghĩa là: $a^\alpha = b \Leftrightarrow \alpha = \log_a b$.
Tính chất
Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Ta có các tính chất sau: <ul style="list-style-type: none"> • $\log_a 1 = 0$. • $\log_a a = 1$. • $a^{\log_a b} = b$. • $\log_a (a)^\alpha = \alpha$.
Quy tắc tính lôgarit
<p>1. Lôgarit của một tích Định lí 1. Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có: $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.</p> <p>2. Lôgarit của một thương Định lí 2. Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có: $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$.</p> <p style="text-align: center;">Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b, (a > 0, b > 0, a \neq 1)$.</p> <p>3. Lôgarit của một lũy thừa Định lí 3. Cho hai số dương a, b, với $a \neq 1$. Với mọi α, ta có: $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.</p> <p style="text-align: center;">Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.</p>
Đổi cơ số
Cho ba số dương a, b, c , với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. <p style="text-align: center;">Đặc biệt: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b, (\alpha \neq 0)$.</p>
Lôgarit thập phân – Lôgarit tự nhiên
<p>1. Lôgarit thập phân Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Khi đó $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$. Nghĩa là $\log_{10} b = \log b = \lg b$.</p> <p>2. Lôgarit tự nhiên Người ta chứng minh được $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045$. Khi đó lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e, $\log_e b$ được viết là $\ln b$. Nghĩa là $\ln b = \log_e b$.</p>

Ví dụ 1. Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính:

a) $2^{\log_4 15} = \dots\dots\dots$

b) $3^{\log_1 \frac{1}{27}} = \dots\dots\dots$

c) $3^{5 \log_3 2} = \dots\dots\dots$

d) $\log_a (a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}) = \dots\dots\dots$

e) $\log_{\frac{1}{3}} 5 \cdot \log_{25} \frac{1}{27} + \log_{\sqrt{2}} 64 = \dots\dots\dots$

f) $2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} = \dots\dots\dots$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức lôgarit theo biến cho trước và chứng minh:

a) Cho $\log_2 3 = a$. Tính $P = \log_{18} 24$ theo a .

b) Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $P = \log_{25} 15$ theo a .

c) Cho $\log_2 5 = a$. Tính $P = \log_4 1250$ theo a .

d) Cho $\log_2 5 = a$ và $\log_2 3 = b$. Hãy tính $P = \log_3 135$ theo a và b .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Không dùng máy tính, hãy thu gọn các biểu thức sau (giả sử điều kiện xác định):

a) $P = \log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$.

b) $P = \log_5 \frac{1}{25} \cdot \log_{27} 9$.

- c) $P = \log_a \sqrt[3]{\sqrt{a}}$. d) $P = \log_{2\sqrt{2}} 8$.
- e) $P = 4^{\log_2 3} + 9^{\log_3 2}$. f) $P = 27^{\log_9 2} + 4^{\log_8 27}$.
- g) $P = 9^{2\log_3 2 + 4\log_3 5}$. h) $P = 9^{\frac{1}{\log_6 3}} + 4^{\frac{1}{\log_8 4}}$.
- i) $P = 5^{3-2\log_5 4}$. j) $P = 25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}$.
- k) $P = 81^{\log_3 5} + 27^{\log_9 36} + 3^{4\log_9 7}$. l) $P = 3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}$.
- m) $P = \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$. n) $P = 2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.
- o) $P = \log_8 [\log_4 (\log_2 16)] \cdot \log_2 [\log_3 (\log_4 64)]$. p) $P = \frac{\log_{a^3} a \cdot \log_{a^4} a^{\frac{1}{3}}}{\log_{a^{-1}} a^7}$.
- q) $P = 49^{\frac{1}{2} \log_7 \sqrt[3]{2}} + \log_{a^2} (a\sqrt{a})$. r) $y = \frac{1}{\log_a (ab)} + \frac{1}{\log_b (ab)}$.
- s) $P = \log_a a^3 \sqrt{a} + \log_a a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$. t) $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \cdot a^5 \sqrt{a^4}}{\sqrt[3]{a}} - \log_a a^2 \sqrt{a^5} a^{\frac{1}{4}}$.

BT 2. Thực hiện các biến đổi theo yêu cầu của các bài toán sau (giả sử điều kiện xác định).

- a) Cho $\log_{12} 27 = a$. Hãy tính $A = \log_6 16$ theo a .
- b) Cho $\log_2 14 = a$. Hãy tính $A = \log_{49\sqrt{7}} 32$ và $B = \log_{49} 32$ theo a .
- c) Cho $\log_{15} 3 = a$. Hãy tính $A = \log_{25} 15$ theo a .
- d) Cho $\log_7 2 = a$. Hãy tính $A = \log_{\frac{1}{2}} 28$ theo a .
- e) Cho $\log_a b = \sqrt{13}$. Hãy tính $A = \log_{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{ab^2}$.
- f) Cho $\log_2 5 = a$ và $\log_2 3 = b$. Hãy tính $A = \log_3 135$ theo a và b .
- g) Cho $\log_{25} 7 = a$ và $\log_2 5 = b$. Hãy tính $A = \log_{\sqrt[5]{5}} \frac{49}{8}$ theo a và b .
- h) Cho $\lg 3 = a$ và $\lg 2 = b$. Hãy tính $A = \log_{125} 30$ theo a và b .
- i) Cho $\log_{30} 3 = a$ và $\log_{30} 5 = b$. Hãy tính $A = \log_{30} 1350$ theo a và b .
- j) Cho $\log_{14} 7 = a$ và $\log_{14} 5 = b$. Hãy tính $A = \log_{35} 28$ theo a và b .
- k) Cho $\log_{49} 11 = a$ và $\log_2 7 = b$. Hãy tính $A = \log_{\sqrt[7]{7}} \frac{121}{8}$ theo a và b .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $\log_a x$ có nghĩa với $\forall x \in \mathbb{R}$. B. $\log_a 1 = a$ và $\log_a a = 0$.
- C. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x \cdot \log_a y$, ($\forall x, y > 0$). D. $\log_a x^n = n \log_a x$, ($x > 0, n \neq 0$).

Câu 2. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng:

A. $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y.$

B. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y.$

C. $\log_a(x.y) = \log_a x . \log_a y.$

D. $\log_a(x+y) = \log_a x . \log_a y.$

Câu 3. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Tìm mệnh đề sai:

A. $\log_a 1 = 0.$

B. $\log_a a = 1.$

C. $\log_a a^b = b.$

D. $\log_a b^2 = 2 \log_a b.$

Câu 4. Cho a, x, y là ba số dương khác 1. Tìm mệnh đề sai:

A. $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$

B. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}.$

C. $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}.$

D. $\log_a y = \log_a x . \log_x y.$

Câu 5. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương. Nên cho $x > y > 0$ Tìm mệnh đề đúng:

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$

B. $\log_a(x-y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$

C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$

D. $\log_a(x-y) = \log_a x - \log_a y.$

Câu 6. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = \log_{a^3} a$ có giá trị là:

A. $-3.$

B. $-\frac{1}{3}.$

C. $\frac{1}{3}.$

D. $3.$

Câu 7. Biết $\log_6 \sqrt{a} = 2$ với $a > 0$ thì $\log_6 a$ bằng:

A. $36.$

B. $6.$

C. $4.$

D. $1.$

Câu 8. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = a^{4 \log_a 5}$ có giá trị là:

A. $5.$

B. $5^2.$

C. $5^4.$

D. $5^8.$

Câu 9. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = a^{8 \log_a 7}$ có giá trị là:

A. $7^2.$

B. $7^4.$

C. $7^6.$

D. $7^8.$

Câu 10. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = a^{\log_a 4}$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{2}.$

B. $2.$

C. $4.$

D. $16.$

Câu 11. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = \log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$ có giá trị là:

A. $-\frac{3}{7}.$

B. $-\frac{7}{3}.$

C. $-\frac{2}{3}.$

D. $-\frac{3}{2}.$

Câu 12. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = \log_a (a^3 . \sqrt{a} . \sqrt[5]{a})$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{15}.$

B. $10.$

C. $20.$

D. $\frac{37}{10}.$

Câu 13. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{a} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}$ có giá trị là:

A. $\frac{111}{20}.$

B. $\frac{9}{5}.$

C. $\frac{173}{60}.$

D. $\frac{9}{4}.$

Câu 14. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó biểu thức $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} a \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$ có giá trị là:

- A. $\frac{67}{5}$. B. $\frac{47}{15}$. C. $\frac{22}{5}$. D. $\frac{16}{5}$.

Câu 15. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}$ bằng:

- A. 3. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{9}{5}$. D. 2.

Câu 16. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_{\frac{1}{a}} \frac{a^3 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \sqrt[4]{a}}$ bằng:

- A. $-\frac{60}{91}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{9}{61}$. D. $-\frac{211}{60}$.

Câu 17. Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$ và thỏa $\log_a b = \sqrt{3}$. Khi đó giá trị của biểu thức $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là

- A. $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$. B. $\sqrt{3}-1$. C. $\sqrt{3}+1$. D. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$.

Câu 18. Cho $0 < a \neq 1$ và $b > 0$. Thu gọn $P = a^{3-2\log_a b}$ ta được kết quả:

- A. $a^3 b^{-2}$. B. $a^3 b$. C. $a^2 b^3$. D. ab^2 .

Câu 19. Cho $0 < a \neq 1$ và hai số thực dương b, c thỏa mãn: $\log_a b = 3$ và $\log_a c = -2$. Khi đó biểu thức $P = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c^5}$ bằng:

- A. 13. B. -2. C. -7. D. 9.

Câu 20. Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ và $\log_a b = -2$, $\log_a c = 5$. Giá trị của $\log_a \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}$ là:

- A. $-\frac{4}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{3}{5}$.

Câu 21. Cho $\log_2 5 = a$. Tính $P = \log_2 200$ theo a ?

- A. $3+2a$. B. $2+2a$. C. $1+2a$. D. $2a$.

Câu 22. Cho $a = \log_2 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 18 + \log_2 21 - \log_2 63$ theo a ?

- A. $2a$. B. $1+a$. C. $1-a$. D. $2-a$.

Câu 23. Nếu $\log 4 = a$ thì $\log 4000$ bằng:

- A. $4+2a$. B. $3+a$. C. $3+2a$. D. $4+a$.

Câu 24. Cho $\log 3 = a$. Tính $P = \log 9000$ theo a ?

- A. a^2+3 . B. a^2 . C. $3a^2$. D. $3+2a$.

Câu 25. Cho $\lg 2 = a$. Tính $P = \lg 25$ theo a ?

- A. $2(1-2a)$. B. $2(2+3a)$. C. $2(1-a)$. D. $3(1-2a)$.

Câu 26. Cho $\lg 5 = a$. Tính $P = \lg \frac{1}{64}$ theo a ?

- A. $2+5a$. B. $1=6a$. C. $4=3a$. D. $6(a=1)$.