

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm hàm số mũ

Cho $0 < a \neq 1$. Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

2. Một số giới hạn liên quan đến hàm số mũ

Hàm số mũ liên tục tại mọi điểm mà hàm số xác định, nghĩa là: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

Từ giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$, bằng cách đặt $\frac{1}{t} = x$, ta được: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Định lí: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$.

3. Đạo hàm của hàm số mũ

Cho $0 < a \neq 1$ và J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

+ Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Đặc biệt: $(e^x)' = e^x$.

+ Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J thì hàm số $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên J và

$(a^{u(x)})' = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$.

Đặc biệt: $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.

4. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ Tập giá trị: $(0; +\infty)$ (vì $a^x > 0, \forall x$)

+ Đạo hàm: $y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$a > 1$	$y' > 0$
$0 < a < 1$	$y' < 0$

+ Giới hạn và tiệm cận:

$a > 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases}$$

Tiệm cận ngang
 $y = 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$

Tiệm cận ngang
 $y = 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$

+ Bảng biến thiên:

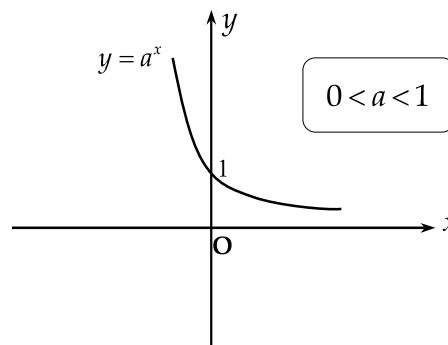
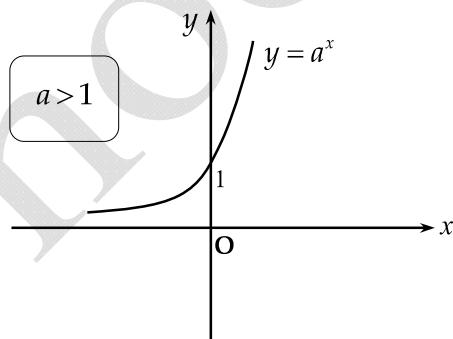
Với $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		+	
y	0	1	$+\infty$

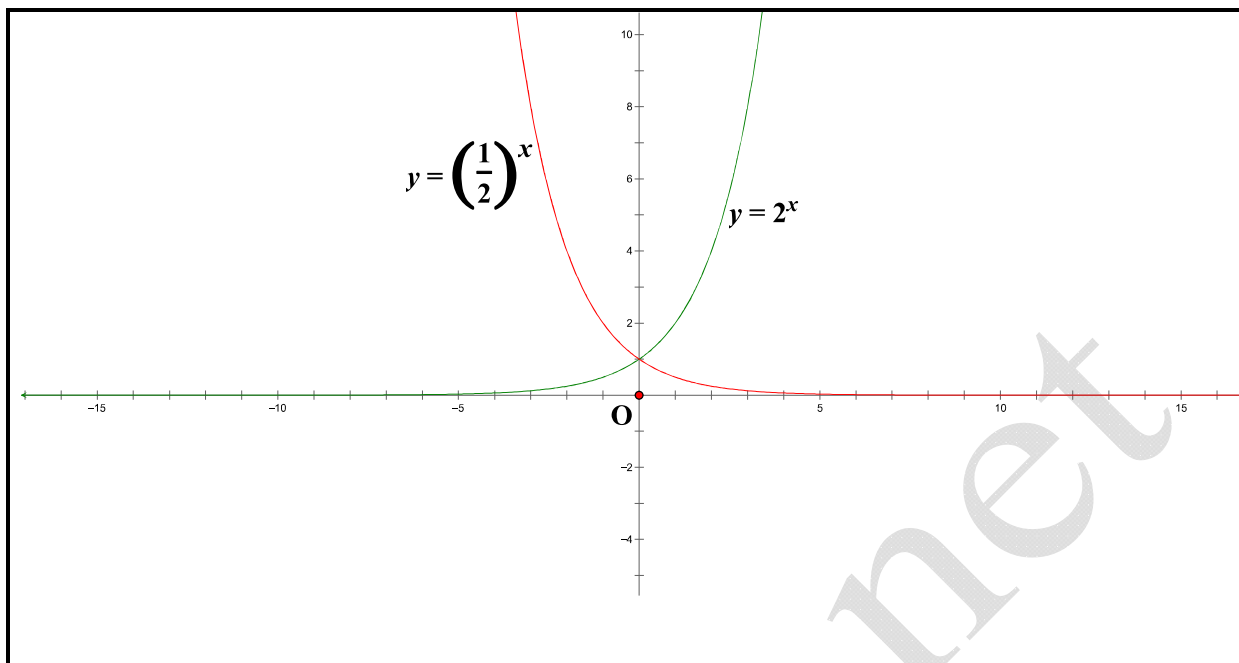
Với $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		-	
y	$+\infty$	1	0

+ Đồ thị hàm số luôn cắt trục tung tại điểm $M(0;1)$ (vì $a^0 = 1$) và nằm ở phía trên trục hoành (vì $a^x > 0$ với mọi x)



Nhận xét: Đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, ($0 < a \neq 1$) thì đối xứng với nhau qua trục tung.



Câu 1. Tìm mệnh **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A. Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ là một hàm đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- B. Hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ là một hàm nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- C. Đồ thị hàm số $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$) luôn đi qua điểm $M(a; 1)$.
- D. Đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, ($0 < a \neq 1$) thì đối xứng với nhau qua trục tung.

Câu 2. Cho hàm số $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $M(0; 1)$.
- B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận là đường thẳng $y = 0$.
- C. Đồ thị hàm số không có điểm uốn.
- D. Hàm số luôn đồng biến.

Câu 3. Cho $a > 1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. $a^x > 1$ khi $x > 0$.
- B. $0 < a^x < 1$ khi $x < 0$.
- C. Nếu $x_1 < x_2$ thì $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- D. Trục tung là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = a^x$.

Câu 4. Cho $0 < a < 1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. $a^x > 1$ khi $x < 0$.

B. $0 < a^x < 1$ khi $x > 0$.

C. Nếu $x_1 < x_2$ thì $a^{x_1} < a^{x_2}$.

D. Trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = a^x$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = 3^x$. Tính $f(a+1) - f(a)$ ta được kết quả là

A. $2 \cdot 3^a$. B. 3^a . C. $3^a - 1$. D. 2.

Câu 6. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$) là

A. $[0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. \mathbb{R} .

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ là

A. $y' = -2xe^x$. B. $y' = x^2e^x$. C. $y' = (2x - 2)e^x$. D. kết quả khác.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$ là

A. $y' = 2 \cdot 2^{2x+3} \ln 2$. B. $y' = 2^{2x+3} \ln 2$. C. $y' = 2 \cdot 2^{2x+3}$. D. $y' = (2x + 3) \cdot 2^{2x+2}$.

Câu 9. Giá trị của đạo hàm của hàm số $y = 2^x - 3^{1-x}$ tại $x = 0$ là

A. $y' = -\frac{2}{3}$. B. $y' = \ln 54$. C. $y' = 3 \ln 3$. D. $y' = 2 \ln 6$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2^x - 1}{5^x}$ là

A. $y' = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} + 5^{-x} \ln 5$. B. $y' = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^x \ln 5$.

C. $y' = x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} - x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$. D. $y' = x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} + x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = ex + e^{-x}$. Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

A. $x = \ln 3$. B. $x = -1$. C. $x = 0$. D. $x = \ln 2$.

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ là

A. $y' = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$. B. $y' = e^x + e^{-x}$. C. $y' = \frac{e^x}{(e^x - e^{-x})^2}$. D. $y' = \frac{-5}{(e^x - e^{-x})^2}$.

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y = e^{\frac{x+1}{3x-2}}$ là

A. $y' = e^{\frac{x+1}{3x-2}}$. B. $y' = \frac{5}{(3x-2)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{3x-2}}$.

$$\text{C. } y' = \frac{x+1}{3x-2} \cdot e^{\frac{x+1}{3x-2}}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{-5}{(3x-2)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{3x-2}}.$$

Câu 14. $y' = 8^{x^2+x+1} (6x+3) \ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây?

A. $y = 2^{x^2+x+1}$. B. $y = 2^{3x^2+3x+1}$. C. $y = 8^{x^2+x+1}$. D. $y = 8^{3x^2+3x+1}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = xe^x$. Khi đó $y''(1)$ bằng

A. $3e$. B. $2e$. C. 0 . D. 1 .

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x) = e^{\cos x} \cdot \sin x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 1 . B. 2 . C. -1 . D. -2 .

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = e^{\cos x}$. Tính giá trị biểu thức $f(\pi) + f'(\pi) + f''(\pi) + f'''(\pi)$ là

A. $\frac{2}{e}$. B. e . C. $\frac{1}{e}$. D. $\frac{e}{2}$.

Câu 18. Với điều kiện nào của a thì $y = (1-3a-4a^2)^x$ là một hàm số mũ?

A. $a \in (-\infty; 1) \cup \left(-1; \frac{1}{4}\right)$. B. $a \in \left(-1; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

C. $a \in \left(-1; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. D. $a \in \left(-1; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = 5e^{x^2}$ và biểu thức $A = f'(x) - 2xf(x) + \frac{1}{5}f(0) - f'(0)$. Giá trị của A là

A. $A=1$. B. $A=2$. C. $A=3$. D. $A=5$.

Câu 20. Cho hàm số $y = xe^x$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $y'' - 2y' + 1 = 0$. B. $y'' - 2y' - 3y = 0$. C. $y'' - 2y' + y = 0$. D. $y'' - 2y' + 3y = 0$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $xy' = (1-x^2)y$. B. $xy = (1+x^2)y'$. C. $xy = (1-x^2)y'$. D. $xy' = (1+x^2)y$.

Câu 22. Cho hàm số $y = e^{\sin x}$ và gọi y' là đạo hàm của hàm số. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$. B. $y' = e^{\cos x}$. C. $y' = -e^{\sin x} \cdot \cos x$. D. $y' = e^{\cos x} \cdot \sin x$.

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x + 2}{\sin x}$ là