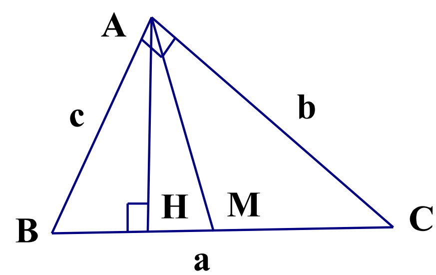
ÔN TẬP 1: KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 9-10

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông : Cho ΔABC vuông ở A ta có :



a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC; \quad CA^2 = CH.CB$

c) AB. AC = BC. AH

d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) BC = 2AM

f) $\sin B = \frac{b}{a}, \ \cos B = \frac{c}{a}, \ \tan B = \frac{b}{c}, \cot B = \frac{c}{b}$

g) $b = a.\sin B = a.\cos C, \ c = a.\sin C = a.\cos B, \ a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C},$

$b = c.\tan B = c.\cot C$

2. Hệ thức lượng trong tam giác thường:

* Định lý Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* Định lý Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. Các công thức tính diện tích.

a/ Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b\sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \ \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt :* ΔABC vuông ở A : $S = \frac{1}{2}AB.AC$,* ΔABC đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b/ Diện tích hình vuông : S = cạnh x cạnh

c/ Diện tích hình chữ nhật : S = dài x rộng

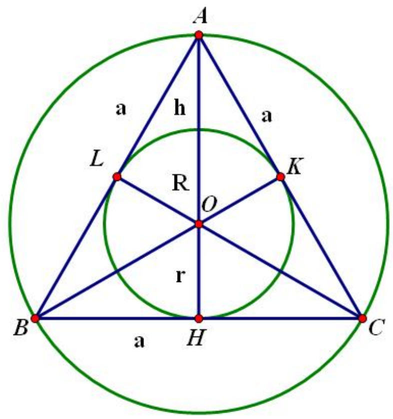
d/ Diện tích hình thoi : $S = \frac{1}{2}$(chéo dài x chéo ngắn)

d/ Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2}$(đáy lớn + đáy nhỏ) x chiều cao

e/ Diện tích hình bình hành : S = đáy x chiều cao

f/ Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

4. Các hệ thức quan trọng trong tam giác đều:



$h = \text{Cạnh}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$R = \text{Cạnh}.\frac{\sqrt{3}}{3}$

$r = \text{Cạnh}.\frac{\sqrt{3}}{6}$

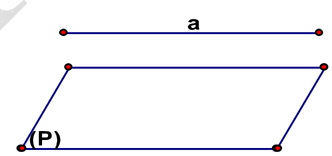
$S = (\text{Cạnh})^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$

ÔN TẬP 2: KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 11

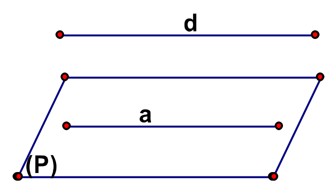
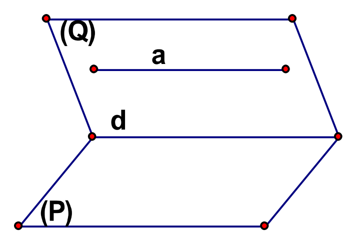
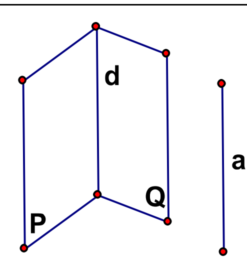
A. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. Định nghĩa:

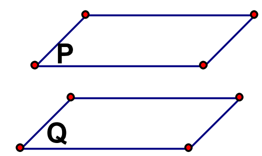
Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$	

II.Các định lý:

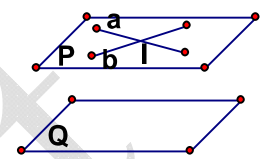
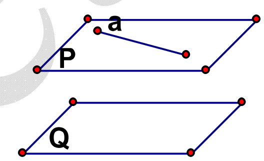
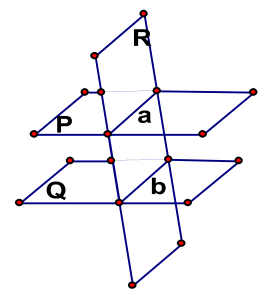
ĐL1:Nếu đường thẳng d không nằm trên mp(P) và song song với đường thẳng a nằm trên mp(P) thì đường thẳng d song song với mp(P)	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d//a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$	
ĐL2: Nếu đường thẳng a song song với mp(P) thì mọi mp(Q) chứa a mà cắt mp(P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.	$\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P)//a \\ (Q)//a \end{cases} \Rightarrow d//a$	

§2.HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P)//(Q) \Leftrightarrow (P)\cap(Q)=\varnothing$	

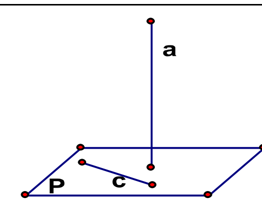
II.Các định lý:

ĐL1: Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a,b\subset(P) \\ a\cap b = I \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$	
ĐL2: Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ a\subset(P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R)\cap(P)=a \\ (R)\cap(Q)=b \end{cases} \Rightarrow a//b$	

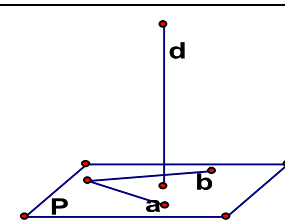
B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

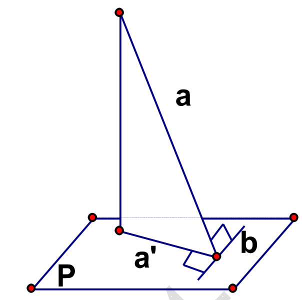
§1.ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I.Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a\perp mp(P) \Leftrightarrow a\perp c, \forall c\subset(P)$	

II. Các định lý:

ĐL1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).	$\begin{cases} d\perp a\ ,d\perp b \\ a\ ,b\subset mp(P) \\ a\,,b \text{ caét nhau} \end{cases} \Rightarrow d\perp mp(P)$	

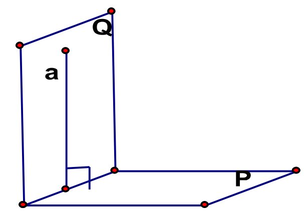
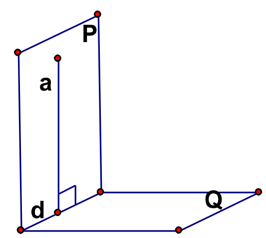
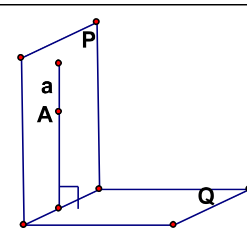
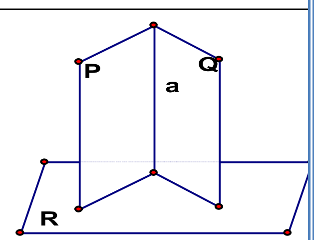
ĐL2: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).	$a \not\perp mp(P), b \subset mp(P)$ $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$	

§2.HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

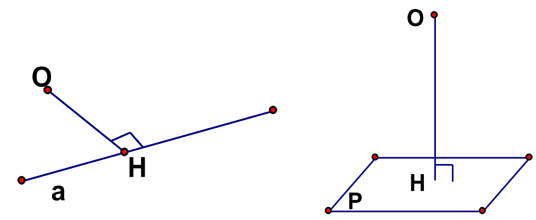
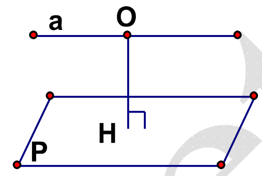
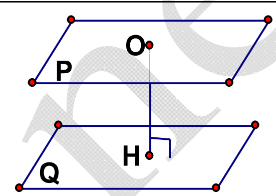
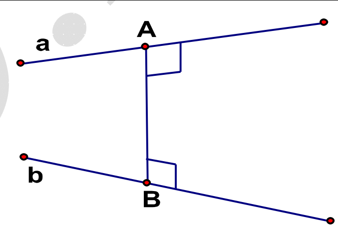
I.Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

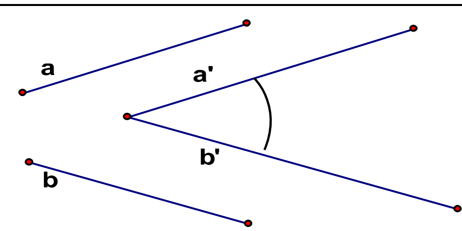
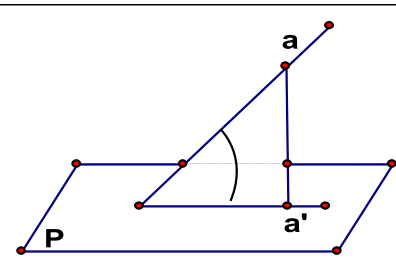
II. Các định lý:

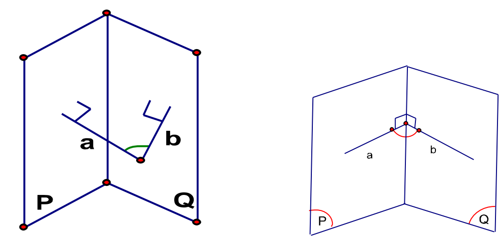
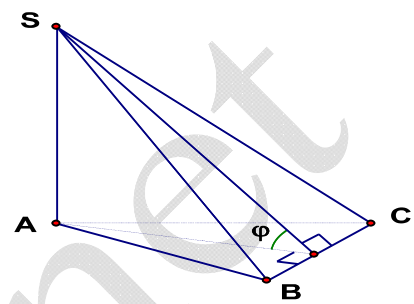
ĐL1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
ĐL2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P)	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	
ĐL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$	

§3.KHOẢNG CÁCH

1. **Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng , đến 1 mặt phẳng:** Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mp(P)) d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH	
2. **Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:** Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P). d(a;(P)) = d(O; (P)) = OH	
3. **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:** là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. d((P);(Q)) = d(O; (P)) = OH	
4.**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:** là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. d(a;b) = AB	

§4.GÓC

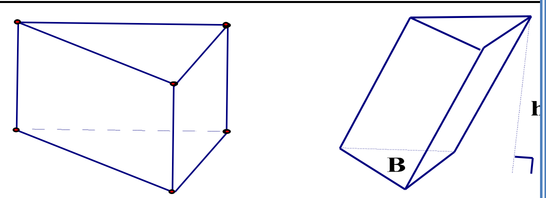
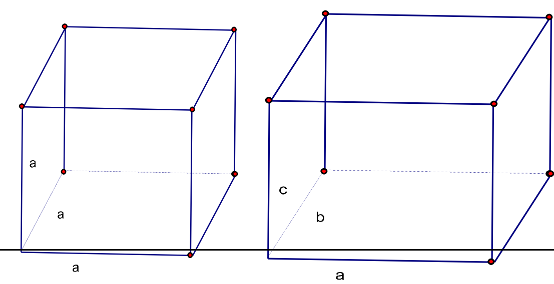
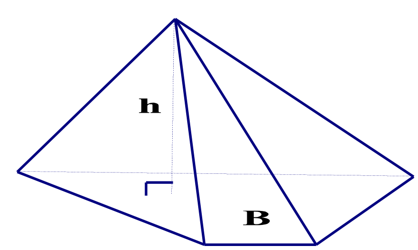
1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.	
2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên mp(P). ***Đặc biệt***: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mp(P) là 90^0.	

3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm	
4. Diện tích hình chiếu: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mp(P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mp(P') thì $$S' = S\cos\varphi$$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P),(P').	

ÔN TẬP 3: KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 12

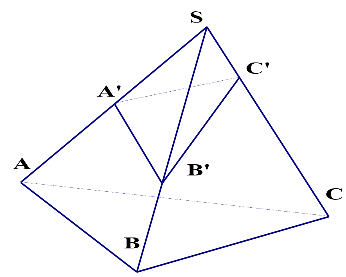
A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I/ Các công thức thể tích của khối đa diện:

1. *THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ*: $\boxed{V = B.h}$ với B: diện tích đáy h: chiều cao	
a) ***Thể tích khối hộp chữ nhật***: $\boxed{V = a.b.c}$ với a,b,c là ba kích thước b) ***Thể tích khối lập phương***: $\boxed{V = a^3}$ với a là độ dài cạnh	
2. *THỂ TÍCH KHỐI CHÓP*: $\boxed{V = \frac{1}{3}Bh}$ với B: diện tích đáy h: chiều cao	

3. *TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN*:
Cho khối tứ diện SABC và A’, B’, C’ là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:

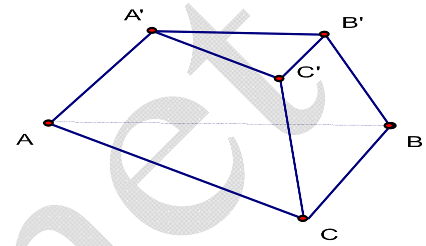
$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$$



4. *THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT*:

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

với $\begin{cases} B,\ B': \text{dieän tích hai ñaùy} \\ h: \text{chieàu cao} \end{cases}$



Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$,
Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$,
Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

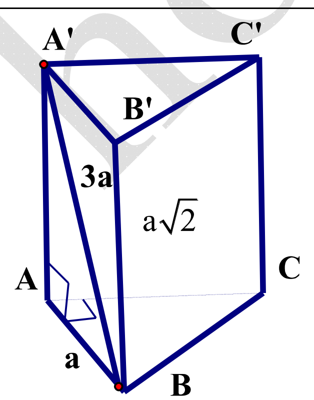
II/ Bài tập:

LOẠI 1: THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

1) Dạng 1:

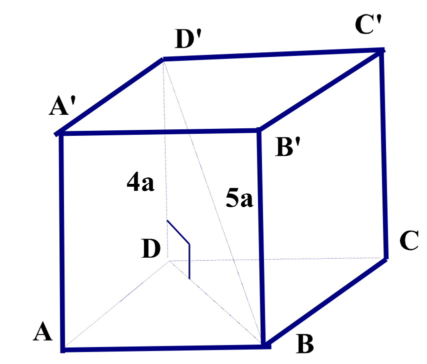
Ví dụ 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:
Ta có
$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên AB = AC = a
ABC A'B'C' là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$
$\triangle AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$
$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$
Vậy $V = B.h = S_{ABC}.AA' = a^3\sqrt{2}$

~~***Ví dụ 2:*** Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A’B’C’D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a.~~

Tính thể tích khối lăng trụ này.



Lời giải:

ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên

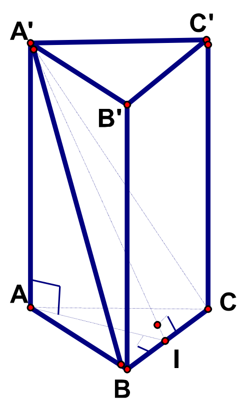
$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$

Suy ra $B = S_{ABCD} = \dfrac{9a^2}{4}$

Vậy $V = B.h = S_{ABCD}.AA' = 9a^3$

Ví dụ 3: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ là tam giác đều cạnh a = 4 và biết diện tích tam giác A’BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC .Ta có

$\triangle$ ABC đều nên

$AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ & $AI \perp BC$

$\Rightarrow A'I \perp BC (dl3 \perp)$

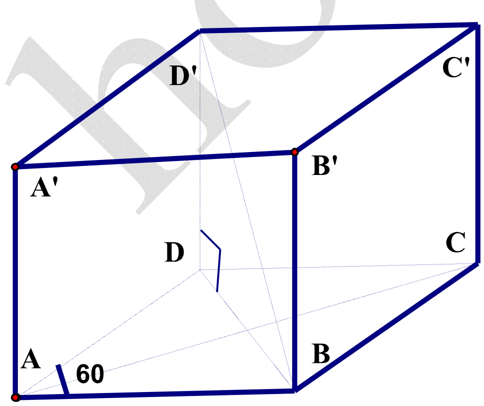
$S_{A'BC} = \dfrac{1}{2} BC.A'I \Rightarrow A'I = \dfrac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$

$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI$.

$\Delta A'AI \Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 5: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60^0 Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp .



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên : BD = a

và $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Theo đề bài $BD' = AC = 2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Delta DD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V = S_{ABCD}.DD' = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Bài tập:

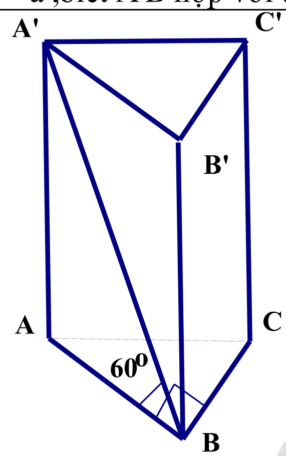
Bài 1: Cho lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều biết rằng tất cả các cạnh của lăng trụ bằng a. Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của lăng trụ.ĐS: $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$; $S = 3a^2$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là tứ giác đều cạnh a biết rằng $BD'=a\sqrt{6}$. Tính thể tích của lăng trụ.Đs: $V = 2a^3$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A ,biết rằng chiều cao lăng trụ là 3a và mặt bên AA'B'B có đường chéo là 5a . Tính thể tích lăng trụ.Đs: $V = 24a^3$

2) Dạng 2: ***Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.***

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $A'A\perp(ABC)\Rightarrow A'A\perp AB\ \&\ AB$ là hình chiếu của A'B trên đáy ABC .

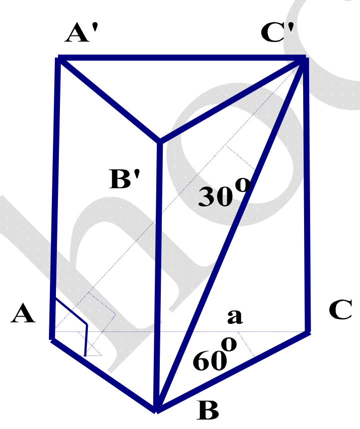
Vậy $góc[A'B,(ABC)]=\widehat{ABA'}=60^o$

$\triangle ABA'\Rightarrow AA'=AB.\tan 60^0=a\sqrt{3}$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{a^2}{2}$

Vậy $V = S_{ABC}.AA' = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a , $\widehat{ACB}= 60^o$ biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30^0. Tính AC' và thể tích lăng trụ.



$\triangle ABC\Rightarrow AB=AC.\tan 60^o=a\sqrt{3}$ .Ta có:

$AB\perp AC; AB\perp AA'\Rightarrow AB\perp(AA'C'C)$

nên AC' là hình chiếu của BC' trên (AA'C'C).

Vậy góc[BC';(AA"C"C)] = $\widehat{BC'A}$ = 30^o

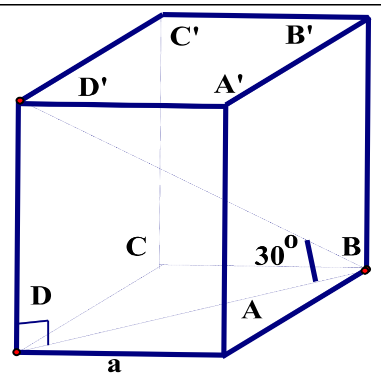
$\triangle AC'B\Rightarrow AC'=\dfrac{AB}{\tan 30^o}=3a$

$V = B.h = S_{ABC}.AA'$

$\triangle AA'C'\Rightarrow AA'=\sqrt{AC'^2-A'C'^2}=2a\sqrt{2}$

$\triangle ABC$ là nửa tam giác đều nên $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .Vậy $V = a^3\sqrt{6}$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy ABCD một góc 30^0. Tính thể tích và tổng diên tích của các mặt bên của lăng trụ .



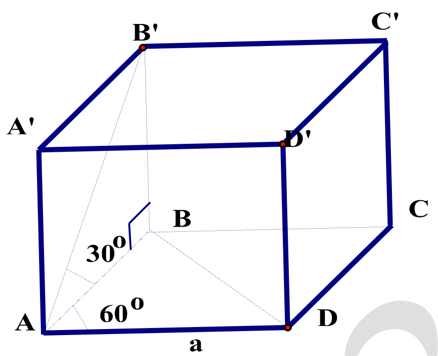
Lời giải:
Ta có ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên ta có:
$DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD' trên ABCD.

Vậy góc [BD';(ABCD)] = $DBD' = 30^0$

$\triangle BDD' \Rightarrow DD' = BD.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy V = $S_{ABCD}.DD'$ = $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$ S = $4S_{ADD'A'}$ = $\dfrac{4a^2\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 4: Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $BAD = 60^o$ biết AB' hợp với đáy (ABCD) một góc 30^o. Tính thể tích của hình hộp.



Lời giải:

$\triangle ABD$ đều cạnh a $\Rightarrow S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

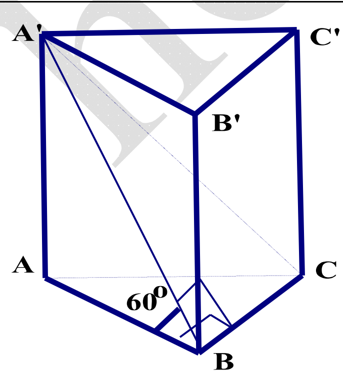
$\triangle ABB'$ vuông tại B $\Rightarrow BB' = AB\tan 30^o = a\sqrt{3}$

Vậy $V = B.h = S_{ABCD}.BB' = \dfrac{3a^3}{2}$

3) Dạng 3: ***Lăng trụ đứng có góc giữa 2 mặt phẳng***

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a , biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0 .Tính thể tích lăng trụ.

Hoạt động của giáo viên:



Lời giải:
Ta có $A'A \perp (ABC) \& BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$

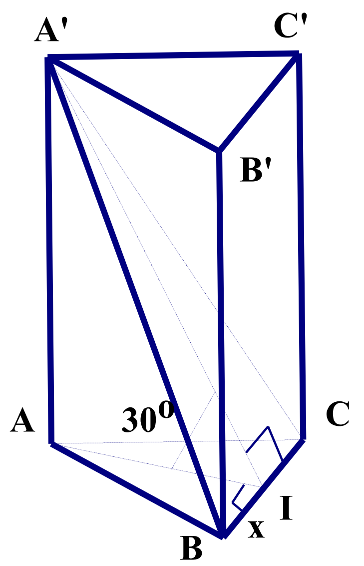
Vậy góc$[(A'BC),(ABC)] = ABA' = 60^o$

$\triangle ABA' \Rightarrow AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy V = $S_{ABC}.AA'$ = $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 2: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều . Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

$\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà $AA' \perp (ABC)$ nên $A'I \perp BC$ (đl 3 ⊥).

Vậy góc[(A'BC);)ABC)] = $\widehat{A'IA} = 30^o$

Giả sử BI = x $\Rightarrow AI = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$ .Ta có

$$\Delta A'AI : A'I = AI : \cos 30^0 = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$$

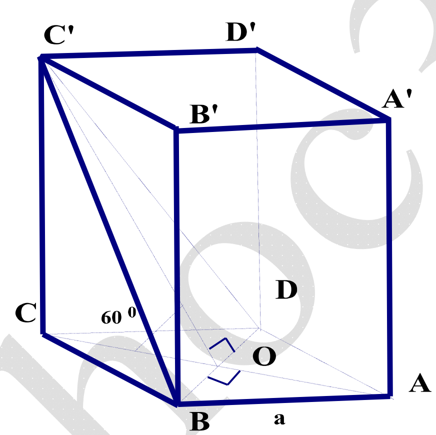
A'A = AI.tan 30^0 = $x\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = x$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}$ = CI.AI.A'A = $x^3\sqrt{3}$

Mà $S_{A'BC}$ = BI.A'I = x.2x = 8 $\Rightarrow x = 2$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o.Tính thể tích khối hộp chữ nhật.



Lời giải:

Gọi O là tâm của ABCD . Ta có

ABCD là hình vuông nên $OC \perp BD$

$CC' \perp$ (ABCD) nên $OC' \perp BD$ (đl 3 ⊥). Vậy góc[(BDC');(ABCD)] = $\widehat{COC'}$ = 60^o

Ta có V = B.h = S_{ABCD}.CC'

ABCD là hình vuông nên $S_{ABCD} = a^2$

$\triangle OCC'$ vuông nên CC' = OC.tan60^o = $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy V = $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có AA' = 2a ; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30^o. Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

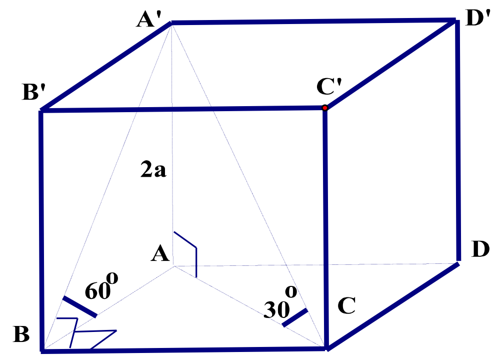
Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow$ AC là hình chiếu của A'C trên (ABCD)

Vậy góc[A'C,(ABCD)] = $\widehat{A'CA} = 30^o$

$BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3 ⊥) .

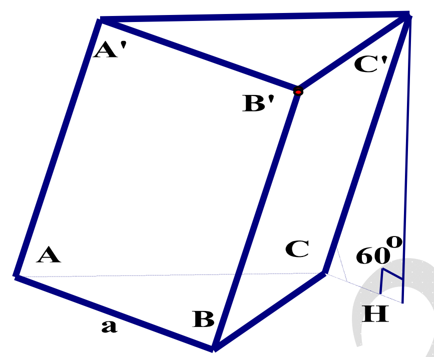
Vậy góc[(A'BC),(ABCD)] = $\widehat{A'BA} = 60^o$

$\triangle A'AC \Rightarrow AC = AA'.\cot 30^o = 2a\sqrt{3}$

	$\triangle A'AB \Rightarrow AB = AA'.\cot 60^o = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ $\triangle ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$ Vậy $V = AB.BC.AA' = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$

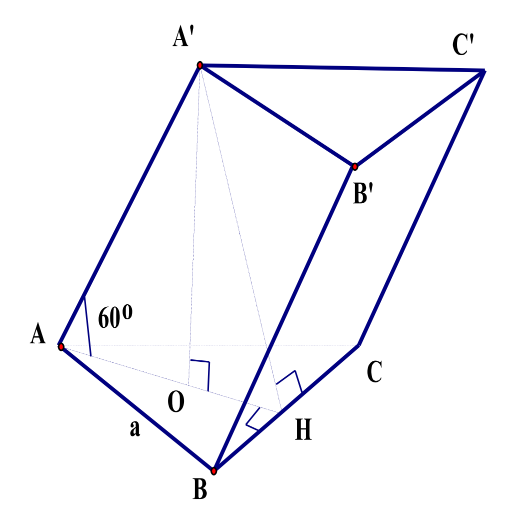
4) Dạng 4: ***Khối lăng trụ xiên***

Ví dụ 1: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60°. Tính thể tích lăng trụ.

	**Lời giải:** Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC) Vậy $góc[CC',(ABC)] = C'CH = 60^o$ $\triangle CHC' \Rightarrow C'H = CC'.\sin 60^0 = \frac{3a}{2}$ $S_{ABC} = = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .Vậy $V = S_{ABC}.C'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60 .

1) Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.
2) Tính thể tích lăng trụ .



Lời giải:

1) Ta có $A'O\perp(ABC)\Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy $góc[AA',(ABC)]=OAA'=60^o$

Ta có BB'CC' là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO\perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC\perp A'H$ (đl 3 $\perp$)

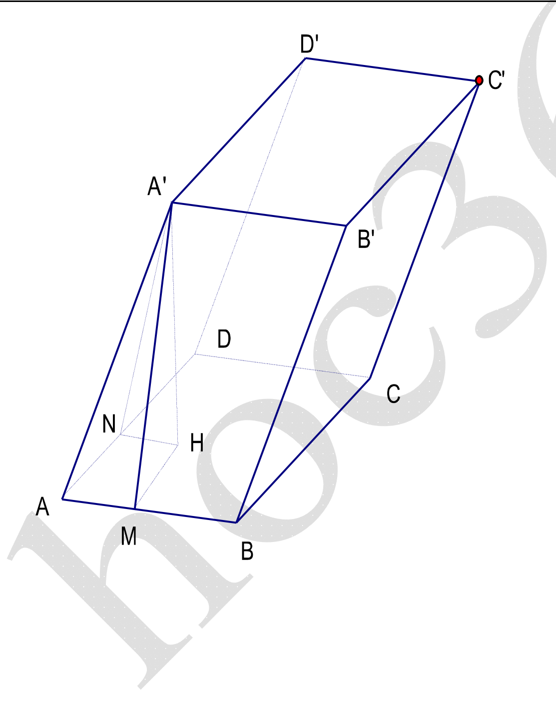
$\Rightarrow BC\perp(AA'H)\Rightarrow BC\perp AA'$ mà AA'//BB' nên $BC\perp BB'$ Vậy BB'CC' là hình chữ nhật.

2) $\triangle ABC$ đều nên $AO=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle AOA'\Rightarrow A'O=AO\tan60^O=a$

Vậy V = $S_{ABC}.A'O=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với AB = $\sqrt{3}$ AD = $\sqrt{7}$ .Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.



Lời giải:

Kẻ A'H $\perp(ABCD)$,HM $\perp AB$, $HN\perp AD$

$\Rightarrow A'M\perp AB,\ A'N\perp AD$ (đl 3 $\perp$)

$\Rightarrow A'MH=45^o, A'NH=60^o$

Đặt A'H = x . Khi đó

A'N = x : sin 60^0 = $\frac{2x}{\sqrt{3}}$

AN = $\sqrt{AA'^2-A'N^2}=\sqrt{\frac{3-4x^2}{3}}=HM$

Mà HM = x.cot 45^0 = x

Nghĩa là x = $\sqrt{\frac{3-4x^2}{3}}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{7}}$

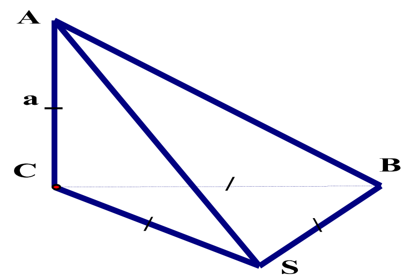
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}$ = AB.AD.x

$=\sqrt{3}.\sqrt{7}.\sqrt{\frac{3}{7}}=3$

LOẠI 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1) **Dạng 1**: ***Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy***

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABC có SB = SC = BC = CA = a . Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp .



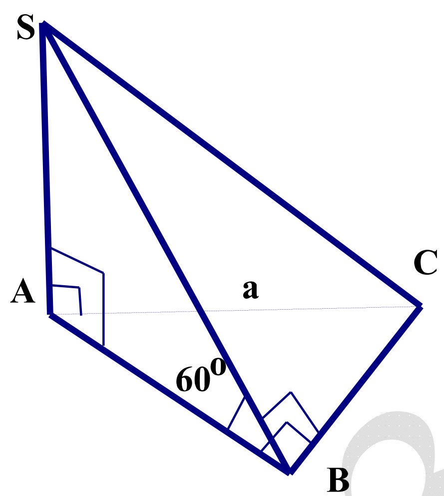
Lời giải:
Ta có

$$\begin{cases}(ABC)\perp(SBC)\\(ASC)\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBC)$$

Do đó $V=\frac{1}{3}S_{SBC}.AC=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}a=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AC = a biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60°.

1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông .
2) Tính thể tích hình chóp.



Lời giải:

1) $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AB\ \&SA\perp AC$

mà $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp SB$ (đl 3 $\perp$).

Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông.

2) Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC).

Vậy góc[SB,(ABC)] = $\widehat{SAB}=60^o$.

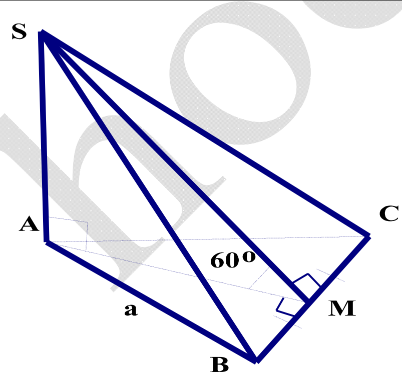
$\triangle ABC$ vuông cân nên BA = BC = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{4}$

$\triangle SAB\Rightarrow SA=AB.\tan60^o=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60°. Tính thể tích hình chóp .



Lời giải: M là trung điểm của BC,vì tam giác ABC đều nên AM $\perp BC\Rightarrow SA\perp BC$ (đl3 $\perp$) .

Vậy góc[(SBC);(ABC)] = $\widehat{SMA}=60^o$.

Ta có V = $\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA$

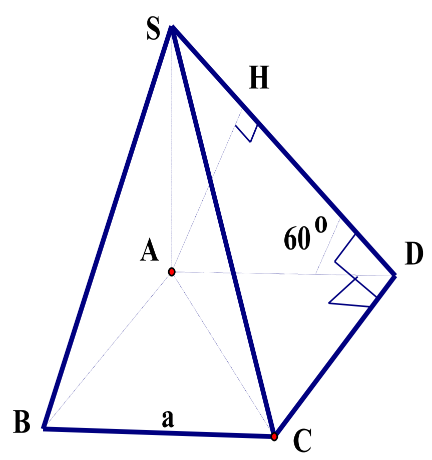
$\triangle SAM\Rightarrow SA=AM\tan60^o=\frac{3a}{2}$

Vậy V = $\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60°.

1) Tính thể tích hình chóp SABCD.

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).



Lời giải:

1) Ta có $SA \perp (ABC)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl 3 ⊥).(1)

Vậy góc[(SCD),(ABCD)] = SDA = 60º .

$\triangle SAD$ vuông nên SA = AD.tan60º = $a\sqrt{3}$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

2) Ta dựng AH $\perp SD$,vì CD ⊥ (SAD) (do (1)) nên CD ⊥ AH $\Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD).

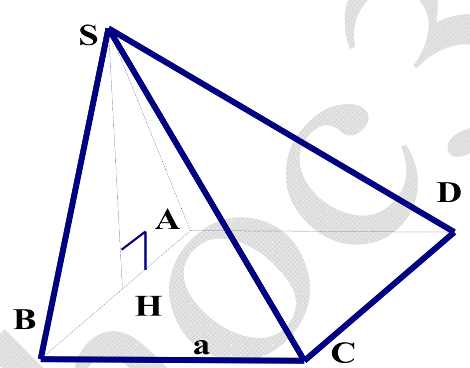
$\triangle SAD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$

Vậy AH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

2) Dạng 2 : ***Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy***

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáyABCD.

1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.
2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Lời giải:

1) Gọi H là trung điểm của AB.

$\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$

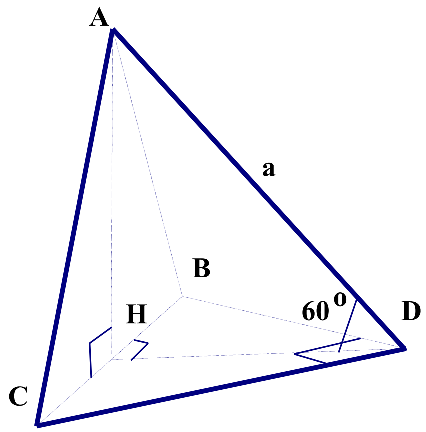
mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vậy H là chân đường cao của khối chóp.

2) Ta có tam giác SAB đều nên SA = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

suy ra $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều ,BCD là tam giác vuông cân tại D , (ABC)⊥(BCD) và AD hợp với (BCD) một góc 60º. Tính thể tích tứ diện ABCD.



Lời giải:
Gọi H là trung điểm của BC.
Ta có tam giác ABC đều nên AH $\perp$ (BCD) , mà (ABC) $\perp$ (BCD) $\Rightarrow$ AH $\perp$ (BCD).

Ta có AH $\perp$ HD $\Rightarrow$ AH = AD.tan60º = $a\sqrt{3}$

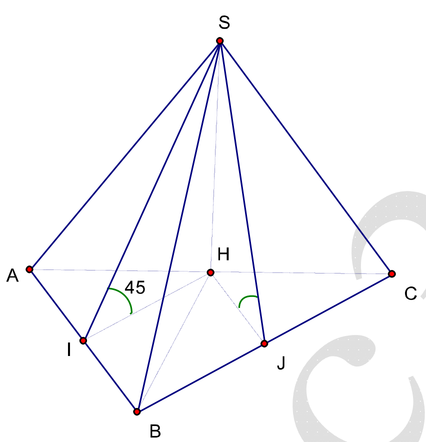
& HD = AD.cot60º = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle BCD \Rightarrow BC = 2HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra

V = $\frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.HD.AH = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45^0.

a) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.
b) Tính thể tích khối chóp SABC**.**



a) Kẻ SH $\perp$ BC vì mp(SAC) $\perp$ mp(ABC) nên SH $\perp$ mp(ABC).
Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC $\Rightarrow$ SI $\perp$ AB, SJ $\perp$ BC, theo giả thiết

$SIH = SJH = 45^o$

Ta có: $\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\triangle ABC$ ừ đó suy ra H là trung điểm của AC.

b) HI = HJ = SH = $\frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{a^3}{12}$

3) Dạng 3 : ***Khối chóp đều***

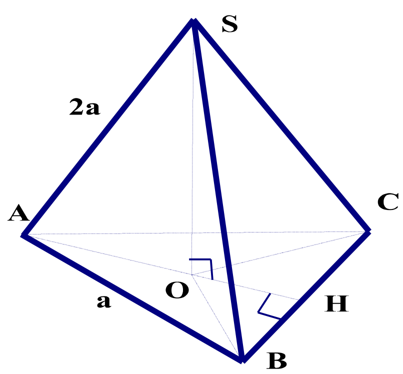
Ví dụ 1: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC.Tính thể tích chóp đều SABC .

\

Lời giải:
Dựng SO $\perp$ (ABC) Ta có SA = SB = SC suy ra OA = OB = OC
Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.
Ta có tam giác ABC đều nên

AO = $\frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

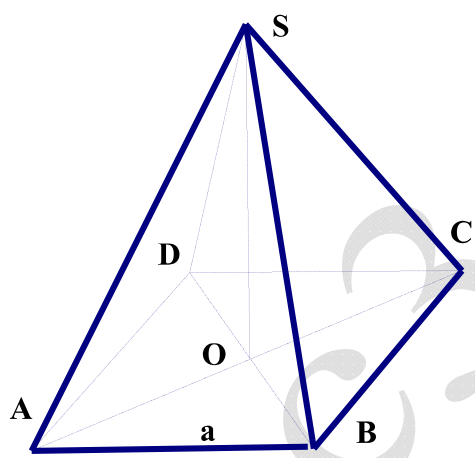
$\Delta SAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$



$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$ .Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$

Ví dụ 2: Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a .

1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.
2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Lời giải:

Dựng SO $\perp$ (ABCD)

Ta có SA = SB = SC = SD nên

OA = OB = OC = OD $\Rightarrow$ ABCD là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên ABCD là hình vuông .

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\triangle ASC$ vuông tại S

$$\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Ví dụ 3: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b)Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC.

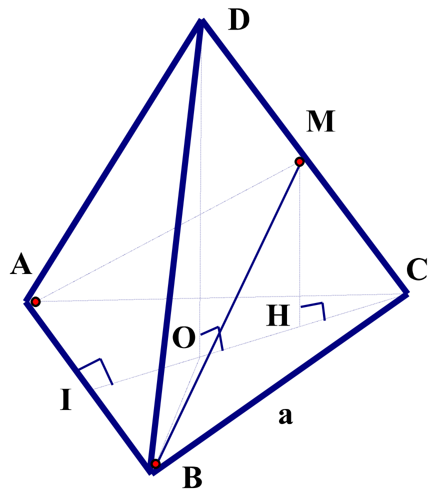
Lời giải:

a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta DOC \text{ vuông có}: DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$$MH = \frac{1}{2}DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

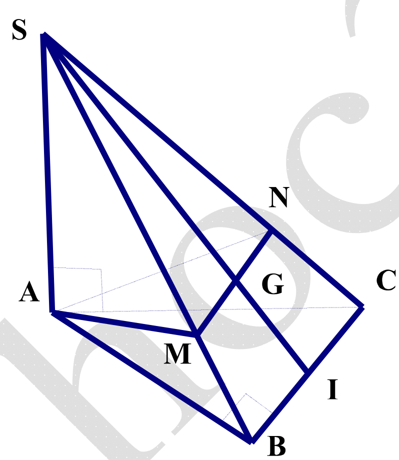
$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.MH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

4) Dạng 4 : ***Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích***

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC , $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.
2) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN



Lời giải:

a)Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$ và $SA = a$

+ ΔABC cân có : $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$ Vậy: $V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{a^3}{6}$

b) Gọi I là trung điểm BC.

G là trọng tâm,ta có : $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

α // BC $\Rightarrow$ MN// BC $\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$$

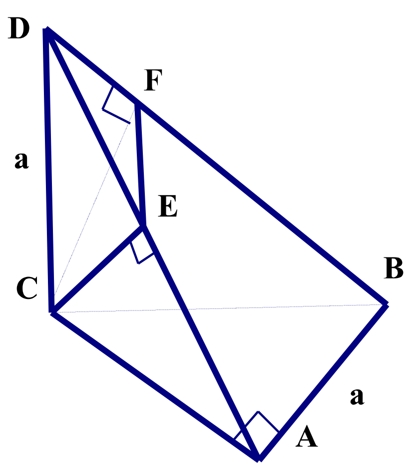
Vậy: $V_{SAMN} = \frac{4}{9}V_{SABC} = \frac{2a^3}{27}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Chứng minh $CE \perp (ABD)$

c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF



Lời giải:

a) Tính V_{ABCD} : $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}.CD = \frac{a^3}{6}$

b) Tacó:

$$AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp EC$$

$$DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$$

c) Tính V_{DCEF} :Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DB}$ (*)

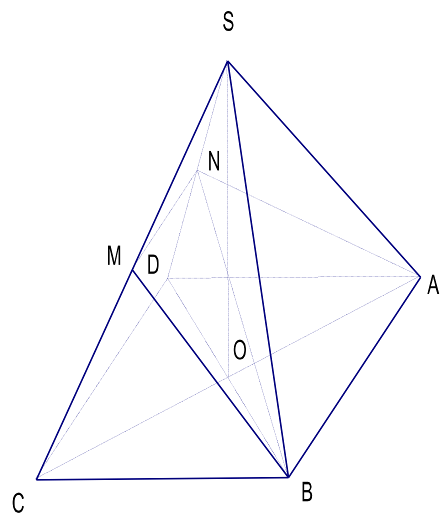
Mà $DE.DA = DC^2$, chia cho DA^2

$$\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Tương tự: $\frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \frac{1}{3}$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{1}{6}$ .Vậy $V_{DCEF} = \frac{1}{6}V_{ABCD} = \frac{a^3}{36}$

Ví dụ 3: Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC . Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.



Lời giải:

Kẻ MN // CD (N $\in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

$+\ \dfrac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \dfrac{1}{2}V_{SADB} = \dfrac{1}{4}V_{SABCD}$

$\dfrac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SBMN} = \dfrac{1}{4}V_{SBCD} = \dfrac{1}{8}V_{SABCD}$

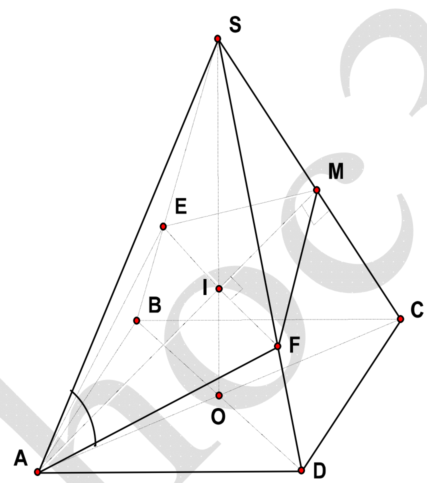
Mà $V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \dfrac{3}{8}V_{SABCD}$.

Suy ra $V_{ABMN.ABCD} = \dfrac{5}{8}V_{SABCD}$

Do đó : $\dfrac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \dfrac{3}{5}$

***Ví dụ 4*:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^o. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

a) Hãy xác định mp(AEMF)
b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD
c) Tính thể tích khối chóp S.AEMF



Lời giải:

a) Gọi $I = SO \cap AM$. Ta có (AEMF) //BD $\Rightarrow$ EF // BD

b) $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO$ với $S_{ABCD} = a^2$

$+\ \Delta SOA$ có : $SO = AO.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

c) Phân chia chóp tứ giác ta có

$V_{S.AEMF} = V_{SAMF} + V_{SAME} = 2V_{SAMF}$

$V_{S.ABCD} = 2V_{SACD} = 2\ V_{SABC}$

Xét khối chóp S.AMF và S.ACD

Ta có : $\Rightarrow \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$

ΔSAC có trọng tâm I, EF // BD nên:

$\Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{V_{SAMF}}{V_{SACD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{SAMF} = \frac{1}{3} V_{SACD} = \frac{1}{6} V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$$

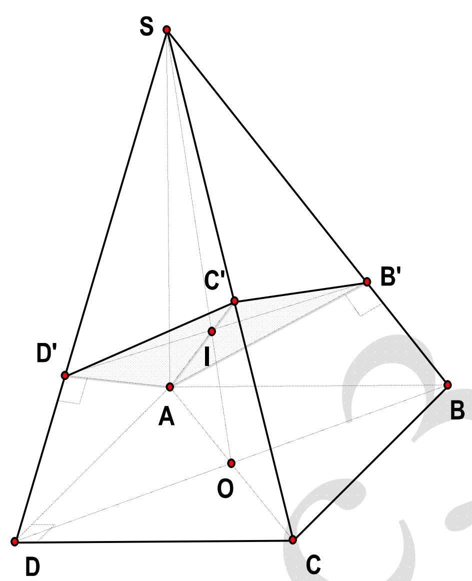
$$\Rightarrow V_{S.AEMF} = 2\frac{a^3\sqrt{6}}{36} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$$

***Ví dụ 5*:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B’, D’ là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng (AB’D’) cắt SC tại C’.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Chứng minh $SC \perp (AB'D')$

c) Tính thể tích khối chóp S.AB’C’D’



a) Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

& $SB \perp AB'$ Suy ra: $AB' \perp (SBC)$

nên AB' $\perp$ SC .Tương tự AD' $\perp$ SC.

Vậy SC $\perp$ (AB'D')

c) Tính $V_{S.AB'C'D'}$

+ Tính $V_{S.AB'C'}$: Ta có: $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} (*)$

ΔSAC vuông cân nên $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$

Từ $(*) \Rightarrow \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{SAB'C'} = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$$

+ $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$