PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Các phép tính về số phức và các bài toán định tính.

Phương pháp:

Dạng 1: Các phép tính về số phứ**C.**

Sử dụng các công thức cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa số phứ**C.**

Dạng 2: Số phức và thuộc tính của nó.

∗ Tìm phần thực và phần ảo: $z=a+bi$, suy ra phần thực a, phần ảo b

∗ Biểu diễn hình học của số phức:

Ví dụ 1 Tìm số phức z thỏa mãn:

1. $|z-3i|=|1-i\bar{z}|$ và $z-\dfrac{9}{z}$ là số thuần ảo. **2.** $|z|=|z-2-2i|$ và $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số ảo.

Lời giải.

1. Đặt $z=a+bi \quad (a, b\in \mathbb{R})$. Khi đó $|z-3i|=|1-i\bar{z}|$ tương đương với

$$|a+(b-3)i|=|1-i(a-bi)| \Leftrightarrow |a+(b-3)i|=|1-b-ai|$$

$$\Leftrightarrow a^2+(b-3)^2=(1-b)^2+(-a)^2 \Leftrightarrow b=2.$$

Khi đó $z-\dfrac{9}{z}=a+2i-\dfrac{9}{a+2i}=a+2i-\dfrac{9(a-2i)}{a^2+4}=\dfrac{a^3-5a+\left(2a^2+26\right)i}{a^2+4}$ và là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^3-5a=0$ hay $a=0, a=\pm\sqrt{5}$.

Vậy các số phức cần tìm là $z=2i, z=\sqrt{5}+2i, z=-\sqrt{5}+2i$.

2. Đặt $z=a+bi \quad (a, b\in \mathbb{R})$. Khi đó $|z|=|z-2-2i|$ tương đương với

$|a+bi|=|(a-2)+(b-2)i|$ tức $a^2+b^2=(a-2)^2+(b-2)^2 \Leftrightarrow b=2-a \quad (1)$

Ta có: $\dfrac{z-2i}{z-2}=\dfrac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi}=\dfrac{\left[a+(b-2)i\right]\left[(a-2)-bi\right]}{(a-2)^2+b^2}$

$=\dfrac{a(a-2)+b(b-2)}{(a-2)^2+b^2}+\dfrac{(a-2)(b-2)-ab}{(a-2)^2+b^2}i$ là số ảo khi và chỉ khi $\dfrac{a(a-2)+b(b-2)}{(a-2)^2+b^2}=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=0, b=2$ tức ta tìm được $z=2i$

Ví dụ 2. Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1$

Lời giải.

Cách 1:

Giả sử $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

$\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow \; |(a-1)+bi| = |a+(b-1)i|$ hay

$(a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2$ tức $a = b$

Lại có: $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow |a+(b-3)i| = |a+(b+1)i|$ hay

$a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1$

Vậy, số phức cần tìm là $z = 1 + i$

Cách 2:

Với 2 số phức z và z' $(z' \neq 0)$, ta luôn có: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Ta có: $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$. Gọi A và B là 2 điểm biểu diễn các số 1 và i tức là $A(1;0)$, $B(0;1)$. Với giả thiết: $|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow MA = MB$, ở đây $M = M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Như vậy, M nằm trên đường trung trực của $AB \Leftrightarrow M$ nằm trên đường thẳng $y = x$ (a)

Lại có: $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow MA = MB$ tức là M nằm trên trung trực của AB, nghĩa là điểm M nằm trên đường thẳng $y = 1$ (b).

Từ (a) và (b) suy ra M nằm trên đường thẳng $y = x$ và $y = 1$ tức $M(1;1)$ $\Rightarrow z = 1 + i$.

Ví dụ 3. Cho số phức $z = x + yi;\, x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính

$T = (z-2)^{2012} + (4-z)^{2012}$

Lời giải.

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

Do $x = y = 0$ không là nghiệm hệ, đặt $y = tx$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x^3(1-3t^2) = 18 \\ x^3(3t-t^3) = 26 \end{cases} \Rightarrow (3t-1)(3t^2-12t-13) = 0$

Khi $t=\frac{1}{3}$ thì $x=3,y=1$, thỏa mãn

Khi $3t^2-12t-13=0$ thì x, y $\notin \mathbb{Z}$. Vậy số phức cần tìm là: $z=3+i$

Vậy, $T=(z-2)^{2012}+(4-z)^{2012}=(1+i)^{2012}+(1-i)^{2012}=-2^{1007}$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn: $x^2+(y+1)^2=2$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+2|=|i-z|$

Lời giải.

Cách 1: Đặt $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phứ**C.**

Ta có: $|z+2|=|i-z|\Leftrightarrow|(x+2)+yi|=|x+(y-1)i|\ \Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$.

Vậy, tập hợp điểm M cần tìm là đường thẳng $4x+2y+3=0$.

Cách 2: $|z+2|=|i-z|\Leftrightarrow|z-(-2)|=|z-i|\ (*)$

Đặt $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức, điểm A biểu diễn số -2 tức $A(-2;0)$ và điểm B biểu diễn số phức i tức $B(0;1)$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MA=MB$

Vậy, tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của AB: $4x+2y+3=0$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-2|+|z+2|=5$

Lời giải.

Đặt $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phứ**C.**

Ta có: $|z-2|+|z+2|=5\Leftrightarrow|(a-2)+bi|+|(a+2)+bi|=5$ hay $\sqrt{(a-2)^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+b^2}=5$ (1)

$$\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2+(a+2)^2+b^2=5\left(\sqrt{(a-2)^2+b^2}-\sqrt{(a+2)^2+b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+b^2}-\sqrt{(a+2)^2+b^2}=-\frac{8a}{5}\ (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{(a-2)^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+b^2}=5\\ \sqrt{(a-2)^2+b^2}-\sqrt{(a+2)^2+b^2}=-\dfrac{8a}{5}\end{cases}$

$$\begin{cases}\sqrt{(a-2)^2+b^2}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4a}{5}\\ \sqrt{(a+2)^2+b^2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{4a}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-2)^2+b^2=\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{4a}{5}\right)^2,\ a\le\dfrac{25}{8}\\ (a+2)^2+b^2=\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{4a}{5}\right)^2,\ a\ge-\dfrac{25}{8}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{9a^2}{25}+b^2=\frac{9}{4}\quad,-\frac{25}{8}\le a\le\frac{25}{8}$$

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức là elip có phương trình

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

Cách 2 : Đặt $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phứ**C.**

Trong mặt phẳng phức, xét các điểm $F_1(-2;0),F_2(2;0)$

Ta có: $MF_1=\sqrt{(-2-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{(a+2)^2+b^2}=|z+2|$

$MF_1=\sqrt{(2-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}=|z-2|$

Giả thiết $|z-2|+|z+2|=5\Leftrightarrow MF_1+MF_2=5$

Vì $MF_1+MF_2>F_1F_2$, nên tập hợp điểm M là 1 elip.

Ta có: $\begin{cases}2a=5\\2c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a^2=25\\4b^2=9\end{cases}\Rightarrow(E):\dfrac{x^2}{\frac{25}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

1. $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0$ biết phương trình có nghiệm thuần ảo

2. $z^4-2z^3-z^2-2z+1=0$ **3.** $\left(\dfrac{z-i}{z+1}\right)^3=8$

Lời giải.

1. Giả sử $z=xi$ là một nghiệm của phương trình . Khi đó, ta có:

$-x^3i-(2-2i)x^2+(5-4i)xi-10i=0$

$\Leftrightarrow(-2x^2+4x)+(-x^3+2x^2+5x-10)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+4x=0 \\ -x^3+2x^2+5x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow x=2i$ là một nghiệm của phương trình. Nên ta biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$(z-2i)(z^2+2z+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i \\ z^2+2z+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=-1\pm 2i \end{array}\right.$.

2. Vì $z=0$ không là nghiệm của phương trình nên

Phương trình $\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}-2(z+\frac{1}{z})-1=0$

$\Leftrightarrow (z+\frac{1}{z})^2-2(z+\frac{1}{z})-3=0$

Đặt $Z=z+\frac{1}{z}$, ta có: $Z^2-2Z-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z=-1 \\ Z=3 \end{array}\right.$.

- $Z=-1 \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=-1 \Leftrightarrow z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
- $Z=3 \Leftrightarrow z^2+3z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

3. Đặt $Z=\frac{z+i}{z+1}$, ta có: $Z^3=8 \Leftrightarrow (Z-2)(Z^2+2Z+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z=2 \\ Z=-1\pm\sqrt{3}i \end{array}\right.$

- $Z=2 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1}=2 \Leftrightarrow z-i=2z+2 \Leftrightarrow z=-2-i$
- $Z=-1+\sqrt{3}i \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1}=-1+\sqrt{3}i \Leftrightarrow z=\frac{-5-\sqrt{3}}{7}+\frac{2+\sqrt{3}}{7}i$.
- $Z=-1-\sqrt{3}i \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1}=-1-\sqrt{3}i \Leftrightarrow z=\frac{-5+\sqrt{3}}{7}+\frac{2-\sqrt{3}}{7}i$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\frac{78y}{x^2+y^2}=20 \\ y+\frac{78x}{x^2+y^2}=15 \end{cases}$; $\begin{cases} x+\frac{16x-11y}{x^2+y^2}=7 \\ y-\frac{11x+16y}{x^2+y^2}=-1 \end{cases}$

Lời giải.

Xét số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$, suy ra $\frac{1}{z}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ $(*)$.

1. Hệ suy ra $\begin{cases} x+\frac{78y}{x^2+y^2}=20 & (1) \\ \left(y+\frac{78x}{x^2+y^2}\right)i=15i & (2) \end{cases}$. Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế, ta được:

$x+\frac{78y}{x^2+y^2}+\left(y+\frac{78x}{x^2+y^2}\right)i=20+15i \quad (3)$.

Phương trình (3) viết lại $(x+yi)+78i.\frac{x-yi}{x^2+y^2}=20+15i$ hay $z+\frac{78i}{z}=20+15i \quad (4)$ do $(*)$, quy đồng mẫu số phương trình (4) và rút gọn ta được: $z^2-5(4+3i)z+78i=0 \quad (5)$, phương trình (5) có biệt số $\Delta=(16+9i)^2$ nên có nghiệm $z=2+3i$ hoặc $z=18+12i$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;3),(18;12)$.

2. Hệ suy ra $x+\frac{16x-11y}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{11x+16y}{x^2+y^2}\right)=7-i$

$\Leftrightarrow x+iy+16\frac{x-iy}{x^2+y^2}-11i\frac{x-iy}{x^2+y^2}=7-i \Leftrightarrow z+\frac{16-11i}{z}=7-i \Leftrightarrow z^2-(7-i)z+16-11i=0$, phương trình này có hai nghiệm: $z=2-3i, z=5+2i$, hệ có nghiệm: $(x;y)=(2;-3)$ hoặc $(x;y)=(5;2)$

Dạng lượng giác của số phức

Phương pháp:

Công thức De – Moivre: Có thể nói công thức De – Moivre là một trong những công thức thú vị và là nền tảng cho một loạt công thức quan trọng khác sau này như phép luỹ thừa, khai căn số phức, công thức Euler.

Công thức 1:

$(\cos x+i\sin x).(\cos y+i\sin y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$

Công thức 2 : $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$

Số phức $z=a+bi$ ta có: $z=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$

$=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Với $r=|z|$ và góc φ được gọi là *argument* của *z*, ký hiệu là $\arg(z)$. Ngược với phép luỹ thừa ta có phép khai căn

Ví dụ 7. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác . Từ đó hãy viết dạng đại số của z^{2012}

1. $z=-2+2i$ **2.** $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ **3.** $z=1-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$

Lời giải.

1. Ta có: $\begin{cases} r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2\sqrt{2} \\ \varphi=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

Vậy $z=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

$$\Rightarrow z^{2012}=(2\sqrt{2})^{2012}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{2012}=2^{3018}\left(\cos 503\pi+i\sin 503\pi\right)=-2^{3018}$$

Vậy $z^{2012}=-2^{3018}$.

2. Ta có: $z=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$$\Rightarrow z^{2012}=2^{3018}\left(\cos\frac{-1006\pi}{3}+i\sin\frac{-1006\pi}{3}\right)=2^{3018}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2^{3018}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2^{3017}(-1+\sqrt{3}i).$$

3. Ta có:

$$z=2\sin^2\frac{\pi}{16}+2i\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}=2\sin\frac{\pi}{16}\left(\sin\frac{\pi}{16}+i\cos\frac{\pi}{16}\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi}{16}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$$

$$\Rightarrow z^{2012}=\left(2\sin\frac{\pi}{16}\right)^{2012}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)^{2012}$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{16}\right)^{2012}\left(\cos\frac{3521\pi}{4}+i\sin\frac{3521\pi}{4}\right)$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{16}\right)^{2012}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(2\sin\frac{\pi}{16}\right)^{2012}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Ví dụ 8. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình: $z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-i\right)z-4i=0$. Tính giá trị biểu thức $Q=z_1^{2012}+z_2^{2012}$

Lời giải.

Phương trình: $z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-i\right)z-4i=0$ có biệt số $\Delta=2i\left(4-2\sqrt{3}\right)$

Dễ thấy $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, $2i=\left(i+1\right)^2$. Khi đó $\Delta=\left[\left(\sqrt{3}-1\right)\left(i+1\right)\right]^2$

Suy ra phương trình cho có 2 nghiệm $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=1-i\sqrt{3}$

Mặt khác $z_1=\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$,

$z_1=\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

Khi đó :

$$Q=2^{2012}\left[\cos\left(-\frac{2012\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{2012\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{2012\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2012\pi}{3}\right)\right]$$

$$Q=2^{2012}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{2012}$$

Cực trị của số phức

Ví dụ 9 Cho số phức z thỏa mãn: $|z-4+3i|=3$. Tìm số phức z có modul nhỏ nhất.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó $|z-4+3i|=3\Leftrightarrow|(a-4)+(b+3)i|=3$

$\Leftrightarrow(a-4)^2+(b+3)^2=9$. Do đó các điểm M biểu diễn số phức z thoả mãn bài toán nằm trên đường tròn (C) tâm $I(4;-3)$ và bán kính $R=3$

$|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm $M\in(C)$ và gần O nhất .

Khi đó M là giao điểm của (C) và đường thẳng OI , với M là giao điểm gần O hơn và

$OI=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

Kẻ $MH\perp Ox$.

Theo định lí talet, ta có: $\frac{MH}{3}=\frac{OM}{OI}=\frac{OI-R}{5}=\frac{5-3}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow MH=\frac{6}{5}$

Lại có: $\frac{OH}{2}=\frac{OM}{OI}\Rightarrow OH=\frac{4}{5}$

Vậy, số phức cần tìm là $z=\frac{4}{5}+\frac{6}{5}i$

Ví dụ 10 Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Lời giải.

Cách 1: áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$||z|-|3-4i|| \le |z-(3-4i)| = 4 \Rightarrow -4+|3-4i| \le |z| \le 4+|3-4i|$

$\Rightarrow 1 \le |z| \le 9$.

- $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \min|z| = 1$
- $|z| = 9 \Leftrightarrow z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i \Rightarrow \max|z| = 9$.

Cách 2: Đặt $z = x+iy \Rightarrow z-3+4i = (x-3)+(y+4)i$

Nên từ giả thiết $\Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2(3x-4y)+9 = 0 \quad (*)$

Do $(3x-4y)^2 \le 25(x^2+y^2) \Rightarrow -5\sqrt{x^2+y^2} \le 3x-4y \le 5\sqrt{x^2+y^2}$

Nên từ (*) ta có: $\begin{cases} x^2+y^2-10\sqrt{x^2+y^2}+9 \le 0 \\ x^2+y^2+10\sqrt{x^2+y^2}+9 \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 9 \Rightarrow 1 \le |z| \le 9$.

Tương tự như trên: $\min|z| = 1$ và $\max|z| = 9$.

Chú ý: Ta có thể giải bài toán theo cách sau

Từ $(x-3)^2+(y+4)^2 = 16 \Rightarrow \exists \alpha \in [0;2\pi]$ sao cho:

$x = 3+4\sin\alpha; y = -4+4\cos\alpha$. Khi đó:

$|z|^2 = (3+4\sin\alpha)^2+(-4+4\cos\alpha)^2 = 41+8(3\sin\alpha-4\cos\alpha)$

Do $-5 \le 3\sin\alpha-4\cos\alpha \le 5 \Rightarrow 1 \le |z|^2 \le 81 \Rightarrow 1 \le |z| \le 9$.

Ví dụ 11 Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Tìm m để $z.\bar{z} = \frac{1}{2}$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho tồn tại m để $|z-1| \le k$

Lời giải.

1. $z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)} = \frac{(-m+i)\left[(1-m^2)-2mi\right]}{\left[(1-m^2)+2mi\right]\left[(1-m^2)-2mi\right]} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1}$