

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Dạng 1. Tính tích phân bằng phương pháp phân tích

Phương pháp:

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta phân tích $f(x) = k_1 f_1(x) + \dots + k_m f_m(x)$

Trong đó các hàm $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) có trong bảng nguyên hàm.

Ví dụ 1 Tính các tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$J = \int_2^7 \frac{x dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$$

Lời giải.

1. Ta có: $x = (3x+1) - (2x+1) = (\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1})$

Nên $I = \int_0^1 (\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}) dx = \left[\frac{2}{9} \sqrt{(3x+1)^3} - \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^1 = \frac{17 - 9\sqrt{3}}{9}$

2. Ta có $x = \frac{1}{4} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$

Nên $J = \frac{1}{4} \int_2^7 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) dx = \frac{19 - 5\sqrt{5}}{6}$.

Ví dụ 2 Tính các tích phân sau: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \sin 3x$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 2x dx$$

Lời giải.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutienvhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

1. Ta có:
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{1}{5} \sin 5x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{5}.$$

2. Ta có:
$$\cos^4 2x = \frac{1}{2} (1 + 2 \cos 4x + \cos^2 4x) = \frac{1}{4} (3 + 4 \cos 4x + \cos 8x)$$

Nên
$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 + 4 \cos 4x + \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16}$$

Dạng 2. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

1. Phương pháp đổi biến số loại 1

Giả sử cần tính $I = \int_a^b f(x) dx$ ta thực hiện các bước sau

Bước 1: Đặt $x = u(t)$ (với $u(t)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$, $f(u(t))$ xác định trên $[\alpha; \beta]$ và $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$) và xác định α, β .

Bước 2: Thay vào ta có:
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) \cdot u'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha).$$

Một số dạng thường dùng phương pháp đổi biến số dạng 1

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$ ta thường đặt $x = \frac{a}{b} \sin t$

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$ ta thường đặt $x = \frac{a}{b \sin t}$

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $a^2 + b^2 x^2$ ta thường đặt $x = \frac{a}{b} \tan t$

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $\sqrt{x(a-bx)}$ ta thường đặt $x = \frac{a}{b} \sin^2 t$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

2. Phương pháp đổi biến số loại 2

Tương tự như nguyên hàm, ta có thể tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số (ta gọi là loại 2) như sau.

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$, nếu $f(x) = g[u(x)] \cdot u'(x)$, ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau

Bước 1: Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$.

Đổi cận $x = a \Rightarrow t = u(a)$, $x = b \Rightarrow t = u(b)$

Bước 2: Thay vào ta có $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt = G(t) \Big|_a^b$.

Ví dụ 1.2.6 Tính các tích phân sau: $I = \int_{-\frac{1}{2}}^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+2}}$ $J = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$

Lời giải.

1. Đặt $t = \sqrt[3]{2x+2} \Leftrightarrow t^3 = 2x+2 \Leftrightarrow x = \frac{t^3-2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}t^2 dt$

Đổi cận: $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Ta có: $I = \int_1^2 \frac{(t^3-2)}{2t} \cdot \frac{3}{2}t^2 dt = \int_1^2 \left(\frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t \right) dt = \left(\frac{3}{20}t^5 - \frac{3}{4}t^2 \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{24}{5} - 3 \right) - \left(\frac{3}{20} - \frac{3}{4} \right) = \frac{12}{5}$.

2. Đặt $t = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow x = 1 + (t-1)^2 \Rightarrow dx = 2(t-1)dt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 2$

$J = 2 \int_1^2 \frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t} dt = 2 \int_1^2 \left(t^2 - 3t + 4 - \frac{2}{t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 4t - 2 \ln t \right) \Big|_1^2 = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Dạng 3. Tính tích phân bằng phương pháp từng phần

Phương pháp:

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

Ví dụ 1 Tính tích phân: $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

Lời giải.

1. Đặt $\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases}$ ta chọn $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$

$$I = -\frac{3 + \ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^3 = \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2 Tính tích phân: $I = \int_0^2 (x-2)e^{2x+1} dx$ $J = \int_{-1}^0 (2x^2 + x + 1) \ln(x+2) dx$

Lời giải.

1. Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x+1} \end{cases}$ ta chọn $\begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x+1} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2} (x-2)e^{2x+1} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x+1} dx = e - \frac{1}{4} e^{2x+1} \Big|_0^2 = \frac{5e - e^3}{4}$$

2. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = (2x^2 + x + 1) dx \end{cases}$ chọn $\begin{cases} du = \frac{1}{x+2} dx \\ v = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \end{cases}$

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \ln(x+2) \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{6} \int_{-1}^0 \frac{4x^3 + 3x^2 + 6x}{x+2} dx = -\frac{1}{6} \int_{-1}^0 \left(4x^2 - 5x + 16 - \frac{32}{x+2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{6} \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 16x - 32 \ln(x+2) \right] \Big|_{-1}^0 \\ &= \frac{16}{3} \ln 2 - \frac{119}{396} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Công thức nào đúng (với k là hằng số)

A. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

B. $\int_a^b k f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

C. $\int_b^a k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

D. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_b^a f(x) dx$

Câu 2. F(x) là một nguyên hàm của f(x). Công thức nào sau đây đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

C. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_b^a = F(b) - F(a)$

D. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(a) - F(b)$

Câu 3. Tính $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$. Đáp án nào sai?

A. $\frac{1}{2}$

B. 4^{-1}

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 4. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Đáp án nào đúng

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $\frac{\ln \sqrt{2}}{2}$

B. $\ln \sqrt{2}$

C. $\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\ln \sqrt{2}$

Câu 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$

A. $\frac{\pi}{2} - 1$

B. $\frac{\pi}{2} + 1$

C. $1 - \frac{\pi}{2}$

D. $-1 - \frac{\pi}{2}$

Câu 6. Kết quả của phép tính $I = \int_0^1 x^3 + 2x + 5 dx$ là

A. $\frac{25}{4}$

B. 6

C. $\frac{29}{4}$

D. 7

Câu 7. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. -1

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 x\sqrt{x+2} dx$

A. $\frac{32}{15}$

B. $\frac{352}{15}$

C. $\frac{17}{15}$

D. $\frac{64}{15}$

Câu 9. Kết quả phép tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$ là

A. $e - 1$

B. e

C. $1 - e$

D. $-e$

Câu 10. Kết quả phép tính $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $e - 2$

B. $2 - e$

C. $e + 2$

D. $2e + 1$

Câu 11: Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$

A. $\ln \frac{3}{2}$

B. $\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\ln \frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. Đáp án khác.

Câu 12: Tích phân $I = \int_0^1 (3x^2 + 2x - 1) dx$ bằng:

A. $I = 1$

B. $I = 2$

C. $I = 3$

D. Đáp án khác

Câu 13: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng:

A. -1

B. 1

C. 2

D. 0

Câu 14: Tích phân $I = \int_0^1 (x + 1)^2 dx$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$

B. 2

C. $\frac{7}{3}$

D. 4

Câu 15: Tích phân $I = \int_0^1 e^{x+1} dx$ bằng:

A. $e^2 - e$

B. e^2

C. $e^2 - 1$

D. $e + 1$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Câu 16: Tích phân $I = \int_3^4 \frac{x+1}{x-2} dx$ bằng:

A. $-1 + 3\ln 2$

B. $-2 + 3\ln 2$

C. $4\ln 2$

D. $1 + 3\ln 2$

Câu 17: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$ bằng:

A. $\ln \frac{8}{5}$

B. $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$

C. $2 \ln \frac{8}{5}$

D. $-2 \ln \frac{8}{5}$

Câu 18: Tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x} dx$ bằng:

A. e

B. 1

C. -1

D. $\frac{1}{e}$

Câu 19: Tích phân $I = \int_0^1 e^x dx$ bằng:

A. $e-1$

B. $1-e$

C. e

D. 0

Câu 20: Tích phân $I = \int_0^2 2e^{2x} dx$ bằng:

A. e^4

B. $e^4 - 1$

C. $4e^4$

D. $3e^4 - 1$

Câu 21: Tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$ bằng:

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $\frac{19}{8}$

B. $\frac{23}{8}$

C. $\frac{21}{8}$

D. $\frac{25}{8}$

Câu 22: Tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x+3} dx$ bằng:

A. $\ln e - 2$

B. $\ln e - 7$

C. $\ln\left(\frac{3+e}{4}\right)$

D. $\ln[4e+3]$

Câu 23: Tích phân $I = \int_{-1}^3 x^3 + 1 dx$ bằng:

A. 24

B. 22

C. 20

D. 18

Câu 24: Tích phân $I = \int_1^2 \frac{1}{2x+1} dx$ bằng:

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{15}$

D. $\frac{1}{4}$

Câu 25: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ bằng:

A. $I = 1$

B. $I = \ln\frac{4}{3}$

C. $I = \ln 2$

D. $I = -\ln 2$

Câu 26: Tích phân: $J = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$ bằng:

A. $J = \frac{1}{8}$

B. $J = \frac{1}{4}$

C. $J = 2$

D. $J = 1$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Câu 27: Tích phân $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$ bằng:

A. $K = \ln 2$

B. $K = 2\ln 2$

C. $K = \ln \frac{8}{3}$

D. $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

Câu 28: Tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$ bằng:

A. $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{8-2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{4+\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}$

Câu 29: Tích phân $I = \int_0^1 x(1-x)^{19} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{420}$

B. $\frac{1}{380}$

C. $\frac{1}{342}$

D. $\frac{1}{462}$

Câu 30: Tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x} dx$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}$

Câu 31: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$ bằng:

A. $\ln \frac{3}{2}$

B. $-\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\ln \frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. Đáp án khác.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>