

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích

Phương pháp:

Để tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$, ta phân tích

$$f(x) = k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x) + \dots + k_n \cdot f_n(x)$$

Trong đó: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ có trong bảng nguyên hàm hoặc ta dễ dàng tìm được nguyên hàm

$$\text{Khi đó: } \int f(x)dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx + \dots + k_n \int f_n(x)dx .$$

Ví dụ 1 Tìm nguyên hàm: $I = \int (e^x + 2e^{-x})^2 dx$

$$J = \int \frac{3^x + 4 \cdot 5^x}{7^x} dx$$

Lời giải.

1. Ta có: $(e^x + 2e^{-x})^2 = e^{2x} + 4 + 4e^{-2x}$

Suy ra: $I = \int (e^{2x} + 4 + 4e^{-2x})dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 4x - 2e^{-2x} + C$

2. $J = \int \left(\left(\frac{3}{7}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x \right) dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{7}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x + \frac{4}{\ln \frac{5}{7}} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x + C$

Ví dụ 2 Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \cos^4 2x dx$$

$$J = \int (\cos 3x \cdot \cos 4x + \sin^3 2x) dx$$

Lời giải.

1. Ta có: $\cos^4 2x = \frac{1}{4}(1 + \cos 4x)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x)$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 4x + \cos 8x)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 4x + \cos 8x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$$

2. Ta có: $\cos 3x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2}[\cos 7x + \cos x]$

$$\sin^3 2x = \frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x$$

Nên suy ra: $J = \int \left(\frac{1}{2} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x \right) dx$

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

$$= \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{3}{8} \cos 2x + \frac{1}{24} \cos 6x + C.$$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

“Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích

$f(x) = g(u(x))u'(x) dx$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$

$\Rightarrow dt = u'(x) dx$. Khi đó: $I = \int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$

Ví dụ 3 Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx \quad J = \int \frac{\ln x \cdot dx}{x(1 + \sqrt{3 \ln x + 2})} \quad K = \int \frac{\ln x \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx$$

Lời giải.

1. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

Suy ra $I = \int (t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C = \left(\frac{\ln^3 x}{3} + \ln x \right) + C.$

2. Đặt $t = \sqrt{3 \ln x + 2} \Rightarrow \ln x = \frac{t^2 - 2}{3} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt$

Suy ra $J = \int \frac{\frac{t^2 - 2}{3} \cdot \frac{2}{3} t dt}{1 + t} = \frac{2}{9} \int \left(t^2 - t - 1 + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \ln(t + 1) \right) + C$

với $t = \sqrt{3 \ln x + 2}.$

3. Đặt $t = \sqrt[3]{\ln^2 x + 2} \Rightarrow \ln^2 x = t^3 - 2 \Rightarrow \frac{\ln x dx}{x} = \frac{3}{2} t^2 dt$

Suy ra $I = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \frac{3}{8} t^4 + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(3 \ln x + 2)^4} + C$

Ví dụ 4 Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\sin^4 2x \cdot \cos^3 x}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$

Lời giải.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

$$\text{Ta có: } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} \cdot \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = -1$$

$$\text{Suy ra: } I = -16 \int \sin^4 x \cdot \cos^6 x \cos x dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ nên ta có:

$$\begin{aligned} I &= -16 \int t^4 (1-t^2)^3 dt = 16 \int t^4 (t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1) dt \\ &= 16 \left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{3} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^5}{5} \right) + C = 16 \left(\frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^9 x}{3} + \frac{3\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^5 x}{5} \right) + C \end{aligned}$$

Ví dụ 5 Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\tan x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx. \text{ Suy ra } I = -\int \frac{dt}{t\sqrt{4-t^2}}$$

$$\bullet t > 0 \Rightarrow I = -\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{4}{t^2} - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad (\text{với } y = \frac{2}{t})$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln |y + \sqrt{y^2 - 1}| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\cos x} + \sqrt{\frac{4}{\cos^2 x} - 1} \right| + C$$

$$\bullet t < 0 \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{4}{t^2} - 1}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\cos x} + \sqrt{\frac{4}{\cos^2 x} - 1} \right| + C.$$

Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Phương pháp:

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó :

$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý: $dv = v'(x) dx$).

Tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ để tính hơn $\int u dv$.

Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1: $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Với dạng này, ta đặt $u = P(x)$, $dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$.

Dạng 2: $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3: $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

Dạng 4: $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int vdu$ ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $y = (1 + \sin x)^2$ là:

A. $\frac{3}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

B. $\frac{2}{3}x + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

C. $\frac{3}{2}x - 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

D. $\frac{2}{3}x - 2 \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{3x-2}{4+x^2}$ là:

A. $\frac{7}{x+4^4} - \frac{1}{4+x^3} + C$

B. $\frac{4}{4+x^4} - \frac{1}{4+x^3} + C$

C. $\frac{4}{4+x^4} - \frac{3}{4+x^3} + C$

D. $\frac{1}{4+x^4} + \frac{3}{4+x^3} + C$

Câu 3. Nguyên hàm của hàm số $y = 2 - 3x^2 \sin 2x$ là:

A. $\frac{1}{2} \left(3x^2 - \frac{7}{2} \right) \cos 2x - \frac{3}{2} x \sin 2x + C$

B. $-\frac{1}{2} \left(3x^2 - \frac{7}{2} \right) \cos 2x + \frac{3}{2} x \sin 2x + C$

C. $\frac{1}{2} \left(3x^2 + \frac{7}{4} \right) \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x + C$

D. $\frac{1}{2} \left(-3x^2 - \frac{7}{2} \right) \sin 2x - \frac{3}{2} x \cos 2x + C$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ là:

A. $\frac{1}{2} x - \ln |\sin x + \cos x| + C$

B. $\frac{1}{2} x - \ln |\sin x - \cos x| + C$

C. $\frac{1}{2} x + \ln |\sin x + \cos x| + C$

D. $\frac{1}{2} x^2 - \ln |\sin x + \cos x| + C$

Câu 5: Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f'(1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(-1) = 2$

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$

C. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{5}{2}$

D. Kết quả khác

Câu 6: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + k}$ với $k \neq 0$?

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutiuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

A. $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+k}|$

B. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{x}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+k}|$

C. $f(x) = \frac{k}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+k}|$

D. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$

Câu 7: Nếu $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ trên

khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $a+b+c$ có giá trị là

A. 3

B. 0

C. 4

D. 2

Câu 8: Xác định a, b, c sao cho $g(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trong khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

A. $a=4, b=2, c=2$

B. $a=1, b=-2, c=4$

C. $a=-2, b=1, c=4$

D. $a=4, b=-2, c=1$

Câu 9: Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x \sin \sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2}$

B. $F(x) = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2}$

C. $F(x) = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2}$

D. $F(x) = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2}$

Câu 10: Trong các hàm số sau:

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

(I) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(II) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 5$

(III) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(IV) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2$

Hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$

A. Chỉ (I)

B. Chỉ (III)

C. Chỉ (II)

D. Chỉ (III) và (IV)

Câu 11: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ là hàm số nào sau đây:

A. $F(x) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + \ln|x|$

B. $F(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

C. $F(x) = x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}^2$

D. $F(x) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \ln|x| + \frac{12}{5}\sqrt[5]{x^6}$

Câu 12: Xét các mệnh đề

(I) $F(x) = x + \cos x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$

(II) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 6\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}}$

(III) $F(x) = \tan x$ là một nguyên hàm của $f(x) = -\ln|\cos x|$

Mệnh đề nào sai ?

A. (I) và (II)

B. Chỉ (III)

C. Chỉ (II)

D. Chỉ (I) và (III)

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng ?

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

$$(I) \int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$$

$$(II) \int \cot x dx = -\frac{1}{\sin^2 x} + C$$

$$(III) \int e^{2\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{2\cos x} + C$$

- A. Chỉ (I) B. Chỉ (III) C. Chỉ (I) và (II) D. Chỉ (I) và (III)

Câu 14: Tìm nguyên hàm $F(x) = e^{x\sqrt{2}}(a \tan^2 x + b \tan x + c)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{x\sqrt{2}} \tan^3 x$ trên khoản $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

- A. $F(x) = e^{x\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $F(x) = e^{x\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x + \frac{1}{2}\right)$
C. $F(x) = e^{x\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x + \frac{1}{2}\right)$ D. $F(x) = e^{x\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \tan x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 15: Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{x}$ là

- A. $\frac{x^2 - 2x}{x^2} + C$ B. $\ln \frac{x-1}{x} + C$ C. $\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x + C$ D. $x - \ln x + C$

Câu 16: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin 2x$. Tìm $F(x)$ biết $F(\pi) = 5$

- A. $F(x) = x - 2 \cos 2x + \pi - 2$ B. $F(x) = x - \frac{\cos 2x}{2} + \pi - \frac{1}{2}$
C. $F(x) = x + \frac{\cos 2x}{2} + \pi + \frac{1}{2}$ D. $F(x) = x - \frac{\cos 2x}{2} + \pi + \frac{1}{2}$